ルシャトリエの原理

藤　本　喬　雄

目　次

I.

経済理論ではしばしば，ある制約条件の下で目的関数を最大化させたり，最小化させる場面がある。そして，その極値状態が均衡であることが多い。このような分析原理は元来物理学から借用してきたもので，力学では古くから最小作用の原理が知られている。また，静力学ではポテンシャル・エネルギー極値の状態が平衡である。物理化学や熱力学でも均衡あるいは平衡状態は極値条件で規定しうる。例えば，断熱系ではエントロピー最大が平衡条件であり，等温等積の閉じた系ではヘルムホルツの自由エネルギー最小が平衡条件である。

さて，経済理論で重要な問題として，与えられた条件が変化した時，均衡状態がどのように変化するか，というのがある。この分野は比較静学あるいは比較動学として，常に大きな研究テーマである。物理学や化学においても，比較静学は重要なテーマであり，そして，そこではルシャトリエの原理という大へん有用な法則がある。

ルシャトリエの原理　平衡状態にある系に対して，一つの作用を加え平衡状態を乱したとする。すると，平衡状態はこの作用を打消す方向へ変化する（[4]参照）。

この原理は異なる分野では，異なる名前をもらっていることがある。電磁気学におけるファラディの法則はその例である。

このルシャトリエの原理を経済学に導入したことは，サミュエルソン〔11〕の功績の一つである。彼に続いて，多くの経済学者がルシャトリエの原理の拡張や応用に取組んできた。そして，時折これらの結果は経済学から物理，化学，数学の方へ逆輸出されている。

さて，本稿では上記の研究結果を紹介し，加えて若干の応用例を示すことにする。その構成はおおよそ次のようである。II 節では，極めて一般的な枠組の中で大局的な原理を証明して与える。物理学における元々のルシャトリエの原理は，局所的なものである。すなわち，平衡状態を乱す作用は微少なものでなければならなかった。しかし，II 節では大局的な原理を扱う。この結果は，アイヒホルンとエットリによるものである。次に，III 節では，ルブランとメーセケによる研究を紹介する。それは凸計画問題の双対性を利用するものである。しかし，彼らの結果の一部は実は線型の場合，森嶋〔10〕によって已に得られていたものである。IV 節では森嶋によるレオンチェフ体系における原理を 2 次元の場合に視覚化して扱う。この原理は一見，極値問題とは無関係に思えるが，実はそうではない。レオンチェフの基本方程式は一つの計画問題として解きうるのである。V 節ではこれを利用して，森嶋の結果を非線型の場合に拡張する。しかし，V 節では詳しい数学的証明の代わりに，そのアイディアを説明する。VI 節では若干の応用例を述べることにしよう。

II.

本節では，アイヒホルン=エットリ〔1〕によるルシャトリエの原理の定式化を紹介する。簡単な枠組であり，証明も容易であるが，その結果は，一般的かつ大局的なものである。そして，それ故に有用である。というのは元来のルシャトリエの原理は，極値条件のうちの 2 次条件（2 次導関数あるいはヘッシアン）を利用した局所的なもので，与件の変化が微少な時だけしか使えなかったからである。

まず，記号を説明しておこう。

X：　任意の集合，

Λ：　任意の集合，

A：　X の部分集合，

B: Aの部分集合，
F: 直積 $A \times B$ の上の実数値関数，
$M(\lambda) \equiv \{x \in A \mid F(x, \lambda) = \inf_{y \in A} F(y, \lambda)\}$。

$M(\lambda)$ はパラメータ集合 A の中の1要素 λ を固定しておいて，y が A の中を動いて F を最小にするような A の要素の集合である。

さて，以上の簡単な枠組のみで，次の定理を証明できる。これは，確かに一般的なルシャトリエの原理と呼びうるものである。

定理 1. $\lambda^1 \in B$, $\lambda^2 \in B$, $x^1 \in M(\lambda^1)$, $x^2 \in M(\lambda^2)$ とする。すると，

$$F(x^2, \lambda^2) - F(x^2, \lambda^1) \leqq F(x^1, \lambda^2) - F(x^1, \lambda^1)$$

が成立する。上式で等号が成立するのは，
$x^2 \in M(\lambda^1)$, $x^1 \in M(\lambda^2)$ の時のみである。

証明 $x^1 \in M(\lambda^1)$ だから

$$F(x^1, \lambda^1) \leqq F(x^2, \lambda^1)。$$

また，$x^2 \in M(\lambda^2)$ だから

$$F(x^2, \lambda^2) \leqq F(x^1, \lambda^2)。$$

上の2個の不等式を辺々加えて，両辺から $F(x^1, \lambda^2) + F(x^2, \lambda^1)$ を引くと，定理の式を得る。等号が成立するのは，上の2個の不等式で共に等号が成立する時であるが，それは無論，定理の条件が成立する場合である。（証明終）

上の定理の応用を1例，その説明を兼ねて挙げておく。この例はサミュエルソンによるものである。

定理 2. 集合 X と A は共に n 次元ユークリッド空間 R^n とする。そして，F は

$$F(x, \lambda) \equiv G(x) + \lambda \cdot x$$

とする。この時，$\lambda^1 \in B$, $\lambda^2 \in B$, $x^1 \in M(\lambda^1)$, $x^2 \in M(\lambda^2)$ ならば

$$(\lambda^2 - \lambda^1) \cdot (x^2 - x^1) \leqq 0$$

が成立する，等号は，$x^2 \in M(\lambda^1)$, $x^1 \in M(\lambda^2)$ の時のみである。但し，$\lambda \cdot x$ は内積 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ を意味する。

証明 定理1を適用すれば，定理2は直ちに出てくる。（証明終）

注意 以上の定理で $M(\lambda)$ は F が最小になる A の要素の集合としたが，最大になるものの集合とする時は，定理の中の不等号は逆向きとなる。証明は全く同様にして遂行できる。

定理2の経済学的意味を最も簡単な場合において説明しておこう。$F(x,\lambda)\equiv\lambda\cdot x$ とする。そして，λ^1 から λ^2 への変化は $\lambda_1{}^1$（λ^1 の第1要素）が，$\lambda_1{}^2$ へと減少しただけで，他の要素は不変とする。ここで，次のような解釈を行っておく。我々の経済には何種類かの財があり，それらを生産するために n 種類の生産工程があるとする。$x\in R_+{}^n$ なる x は活動水準ベクトルと呼ばれ，x_i が第 i 番目の工程の活動（すなわち使用）の度合を示す（ここで $R_+{}^n$ は R^n の非負象限を表わす)。一方，λ_i は第 i 工程を活動水準1単位で使用する時の労働投入量と考える。また，規模に対する収穫不変を仮定しておく。さて，A をある所望の最終需要を満たすための活動水準ベクトル x の集合とする。すると，$M(\lambda^1)$ は労働投入ベクトルが λ^1 の時に，所望の最終需要を実現しつつ，総必要労働量 $\lambda\cdot x$ を最小化する活動水準ベクトルの集合である。$\lambda_1{}^1$ の $\lambda_1{}^2$ への減少は第1工程において，労働投入量を減らす技術進歩があったと考えればよい。定理2はその時，

$$(\lambda_1{}^2-\lambda_1{}^1)\cdot(x_1{}^2-x_1{}^1)\leqq 0,$$

すなわち，$x_1{}^2\geqq x_1{}^1$ となることを意味している。要するに，第1工程において労働を節約する技術進歩があれば，総必要労働最小化のためには，その工程をより強度に使用することはあれ，決してより少なく使うようにはならないということである。自明のようでもあるし，そうとも言い切れない複雑な内幕もある。その少し複雑な例として，もう1個アイヒホルン＝エットリ〔1〕によるものを述べておく。

定理3. $F\equiv G(x)+x^t\lambda x$ とする。ここで $x\in A\subset R^n$，λ は $n\times n$ の実対称行列とする。
x は列ベクトル，x^t は行ベクトルを表わすとする。さて，$x^1\in M(\lambda^1)$，$x^2\in M(\lambda^2)$ ならば，

$$(x^2-x^1)^t(\lambda^2-\lambda^1)(x^2+x^1)\leqq 0$$

が成立する。

証明 定理1から直ちに出てくる。 (証明終)

この定理3も，簡単な経済学的解釈をくっつけることができるが，〔1〕を参照されたい。

III.

本節では，凸計画問題の鞍点定理を巧みに使ったルブラン=メーセケ〔7〕の方法を簡単に紹介する。計画問題の双対変数を利用するので，仮に双対性アプローチとしておいた。

まず，次の問題 (P) を考える。

(P) $\min f(x)$ subject to $x \in A \equiv \{x \in X | h(x) \geqq b^1\}$。

ここで，X は R^n の凸開集合，f は R^n から R への凸関数，h は R^n から R^m への凹ベクトル関数，b^1 は m 次元ベクトルとする。f, h, X, b^1 は全て与えられたものである。

まず，**スレーターの条件**を仮定しておく。すなわち，$h(x^0) > b^1$ なる x^0 が X の中にあるということである（ベクトル比較のための不等号は通常の意味で用いている。$>$は全ての要素において左側のベクトルが大きいことを示し，$\geq$ は $\geqq$ であるが $=$ でもないことを表わす。$<$，$\leq$ も同じように用いる)。さて，x^* が問題 (P) の1個の解とすると，**宇沢の鞍点定理**は次のようになる。

定理4. x^* が (P) の解であるための必要十分条件は，$y^* \in R^m$ が存在して，(x^*, y^*) がラグランジュ関数

$$L(x, y) \equiv f(x) + y(b^1 - h(x))$$

の鞍点となることである。

この定理の証明は例えば，O. Mangasarian, "*Nonlinear Programming*," McGraw-Hill, 1969年の5章を見られたい。 さて，鞍点であるというのは，

$$f(x) + y^*(b^1 - h(x)) \geqq f(x^*) + y^*(b^1 - h(x^*)) \geqq f(x^*) + y(b^1 - h(x^*)) \quad \cdots\cdots(3.1)$$

が，全ての $x \in X$，$y \geqq 0$ について成立することである。(3.1) 式から容易に，

$$y^*(b^1 - h(x^*)) = 0 \quad \cdots\cdots(3.2)$$

が出る。

さて，与件の b^1 が b^2 に変化した時の (P) の解を x^{**}，ラグランジュ乗数

を y^{**} とする。やはり鞍点定理により，

$$f(x)+y^{**}(b^2-h(x)) \geqq f(x^{**})+y^{**}(b^2-h(x^{**})) \geqq f(x^{**})+y(b^2-h(x^{**})) \quad \cdots\cdots(3.3)$$

が，全ての $x \in X$，$y \geqq 0$ について成立し，また，

$$y^{**}(b^2-h(x^{**}))=0 \quad \cdots\cdots(3.4)$$

が出る。

定理 5. $(y^{**}-y^{*})(b^2-b^1) \geqq 0$

証明 (3.1) の x, y に x^{**}, y^{**} を代入して，(3.2) を使うと，

$$f(x^{**})+y^{*}(b^1-h(x^{**})) \geqq f(x^{*}) \geqq f(x^{*})+y^{**}(b^1-h(x^{*})),$$

となる。同様に (3.3) の x, y に x^{*}, y^{*} を代入して，(3.4) を使うと，

$$f(x^{*})+y^{**}(b^2-h(x^{*})) \geqq f(x^{**}) \geqq f(x^{**})+y^{*}(b^2-h(x^{**})),$$

となる。この2個の不等式を辺々加えて，整理すると定理の結果となる。

（証明終）

この結果は一見，定理2と似ているが，そうではない。II節ではパラメータ λ は目的関数に含まれていたが，本節ではパラメータ b は許容集合 A に関係している。また，定理2はパラメータの変化と解 x の変化を直接結びつけているが，定理5はパラメータ変化と双対変数 y の変化を結びつけるものである。定理5の経済学的解釈を与えておく。定理2の場合と同様，経済に m 種の財と n 種の生産工程があるとする。x は活動水準ベクトルであり，$h(x)$ が各財の生産量を表わす生産関数，b が所望の最終需要ベクトル，$f(x)$ が総必要労働を示す関数と考えてみよ。この時，双対変数 y は各財の潜在価格とも見なしうるものである。定理5は，第 i 財のみの最終需要が増加した時，その潜在価格 y_i が上昇するか，不変であることを意味する。これまた，自然な結果に思えるであろう。

IV.

今までは，最適化問題に関連して，ルシャトリエの原理が定式化されてきた。この原理は，特殊な連立方程式体系の解とそのパラメータの間にも成立するのである。例えば，線型のレオンチェフ基本方程式においてである。このことは，サミュエルソン〔12〕で述べられたが，それを初等的に美事に証明した

のは森嶋〔9〕である。本節ではそれを詳しく紹介することはやめて，2次元の図を使って，その内容の1部を目で見てみることにする。

さて，A をレオンチェフの投入行列で $n\times n$ とする（本節の場合，$n=2$ と考えればよい）。I を n 次元単位行列，b^1 を n 次元の最終需要ベクトルとする。レオンチェフの基本方程式は，

$$x=Ax+b^1,\quad x\in R_+{}^n$$

である。この式は

$$(I-A)x-b^1=0, \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

と書ける。もし，$(I-A)x>0$ なる $x\geqq 0$ が存在すれば，(4.1) 式は任意の $b^1\geqq 0$ に対して非負の解を持つ。この条件は，**アローの条件**とか，**生産性の条件**とか言われるが，要するに，全ての財を純生産できるような活動水準ベクトルが存在することを意味する。本節では，この生産性の条件を仮定する。

さて，2次元の場合に (4.1) 式を詳しく書いておこう。

$$\begin{cases} x_1-a_{11}x_1-a_{12}x_2-b_1{}^1=0, \\ x_2-a_{21}x_1-a_{22}x_2-b_2{}^1=0。\end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

簡単化のために，$a_{ij}>0$, $b_i{}^1>0$（全ての i, j について）と仮定しておく。(4.2) は，

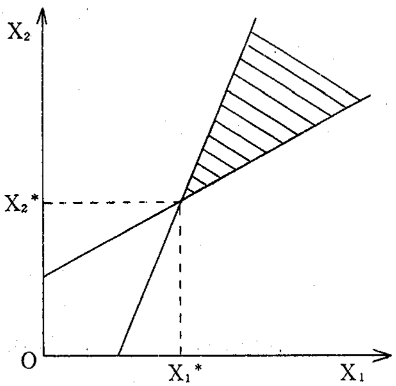
$$\begin{cases} x_1=(a_{12}/(1-a_{11}))x_2+b_1{}^1/(1-a_{11}), \\ x_2=(a_{21}/(1-a_{22}))x_1+b_2{}^1/(1-a_{22}), \end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

と変形される（分母の $(1-a_{ii})$ は生産性の条件により正である）。これを図示すると図-1のようになる。$x_1{}^*$, $x_2{}^*$ が (4.2) の解である。

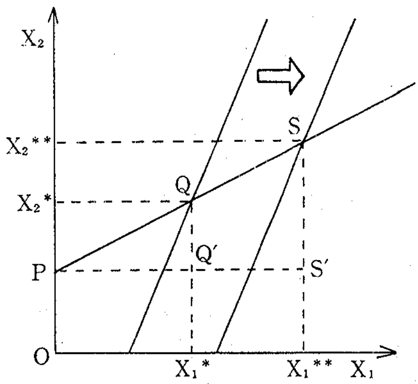
さて，今 $b_1{}^1$ が $b_1{}^2$ へと増加したとしよう。$b_2{}^2$ は不変で元の $b_2{}^1$ と同じとする。この場合の (4.3) 式を図-1に重ねたものが，図-2であり最終需要パラメータ b^2 となった時の (4.2) 式の解は $x_1{}^{**}$, $x_2{}^{**}$ で示している。この図-2から種々の命題が出てくる。

命題1. $x_1{}^{**}-x_1{}^*>0$, $x_2{}^{**}-x_2{}^*>0$。

証明は必要ないであろう。第1財の需要が増加したら，両部門共にその活動水準を上げなければいけないのである。ここで，x_2 の方も増加しなくてはならないのは，a_{21} が正であるからである。すなわち，第1産業が第2財を投入物として必要とするからである（もし，$a_{21}=0$ ならば，(4.3) 式の第2式が表わす



図—1



図—2

直線は，x_1 軸に平行となって，図–2 から類推できるように，$x_2^{**}=x_2^*$ となり活動水準は不変である）。このことは一般の n 産業の場合，A の**分解不可能性の条件**として知られている。次に，

命題 2.　$x_1^{**}/x_1^*>x_2^{**}/x_2^*$。

証明　点 P，Q，S，Q′，S′ を図–2 のように定める。すると，

$x_1^{**}/x_1^*=\mathrm{PS'}/\mathrm{PQ'}=\mathrm{PS}/\mathrm{PQ}=(x_2^{**}-\mathrm{OP})/(x_2^*-\mathrm{OP})>x_2^{**}/x_2^*$。

（証明終）

この定理は，第 1 財の最終需要が増加した時，両部門共その活動水準は上昇するのだが，第 1 財を生産する部門の方が，その上昇率が大きいことを意味している。

命題 3.　b^1 が b^2 になった時，x_2^* は不変に保って，(4.2) 式の第 2 式の成立はあきらめ，第 1 式のみを成立させる x_1 を $x_{1.2}^{**}$ と書けば，

$$x_{1.2}^{**}<x_1^{**}$$

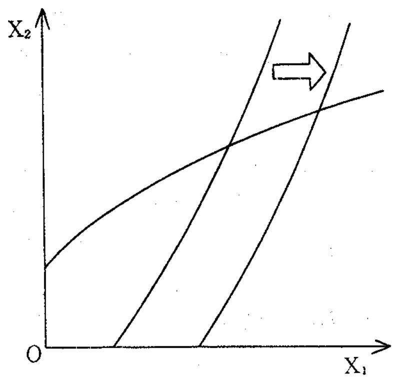
である。

この証明も図–2 から明らかであるので省略する。この定理の意味は，第 2 産業がその活動水準を変えないことが政策的に望ましい時，あるいは，変えるのに大へん長時間を要する時は，第 1 産業の活動水準の上昇率は低まるということである。もちろん，この時，第 2 財は外国から借りてくるか，もしくは強制的

に b_2^1 から引き下げる必要がある。

V.

本節では，IV 節の結果の非線型拡張について述べる。図-1, 2 からわかるように，IV 節の諸命題を得るためには，方程式が線型でなくてもよい，すなわち，図の線は直線でなくて図-3 のような曲線でもよい。また，前節の記号で



図—3

言うならば，b^1 の要素の変化（すなわち，最終需要の変化）だけでなく，A という技術係数の変化についても，ルシャトリエの原理が証明できそうだということが，図-2 からわかる。そこで，本節では (4.1) 式を一般化した

$$F(x;c)=0 \qquad \cdots\cdots(5.1)$$

という非線型方程式の解 $x\in R_+^n$ とパラメータ $c\in C\subset R^m$ との間のルシャトリエの原理について考えてみる。関数 F は詳しく書くと，

$$F(x;c)\equiv(F_1(x;c),\cdots\cdots,F_n(x;c))$$

で，R_+^n から R^n の中へのベクトル値関数である（すなわち，各 F_i は実関数である）。

以上の非線型化のアイディアに対して，第 2 のアイディアは，方程式 (4.1) あるいは (4.2) を最適化問題を通じて解くということである。これは藤本〔2〕

でも利用されているが，この方法で，解の性質の特徴付けが非常に簡単化することがある。(4.1) 式の場合で説明すると，その解は，次の問題の最適解として得られる。

(問題) min x_1+x_2 subject to$(I-A)x-b^1\geqq 0$, $x\in R_+{}^n$。

この問題の許容ベクトル集合は，図-1 の斜線を施した部分である。よって，最適解が方程式 (4.1) の解であることは，図より明白であろう。また，生産性の条件はスレーターの条件と見なしうる。さて，以上 2 個のアイディアを用いて，(5.1) 式の解に関するルシャトリエの原理を考察できる。

まず，我々は関数 F に関して，連続性のほかに次の諸仮定を置く。それらは曲線が図-3 のように極端に歪むことなく，唯一の解を保証するための仮定である。

A1.　$F(0;c)\leq 0$, 全ての $c\in C$ に対して。

A2.　任意の $c\in C$ に対して，$F(x;c)\geqq 0$ となる $x\in R_+{}^n$ が存在する。

A3.　任意の $c\in C$ と添数集合 $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ の真部分集合 P が与えられたとする。2 個のベクトル $x, y\in R_+{}^n$ が，$x_i=y_i(i\in P)$, $x_j>y_j(j\notin P)$ を満たせば，$F_i(i;c)\leqq F_i(y;c)$ が全ての $i\in P$ について成立し，しかも 1 個は厳密な不等式が成立する。(すなわち，分解不可能性)。

A4.　任意の $c\in C$ に対し，もし，$F(x^0;c)\geqq 0$ ならば，$k>1$ なる任意のスカラー k に対し $F(kx^0;c)\geq 0$ となる。

以上の仮定は，線型レオンチェフ・モデルの基本方程式 $F(x;b)\equiv(I-A)x-b$ において，A が分解不可能で生産性の条件を満たす時，全て満足される。我々の F はもっと一般的に非線型でよいし，パラメータ c の次元も任意なので，b だけでなく A の係数もパラメータ化できるのである。このため，我々のルシャトリエの原理は，最終需要の変化だけでなく，技術係数の変化も扱いうるのである。

さて，上記の仮定の下で，$F(x;c)=0$ は，任意の $c\in C$ に対して唯一の正の解 x を持つことが証明できる (証明については藤本 [3] を見られたい。以下他の証明についても同様である)。今，$c^*, c^1\in C$ という 2 個の c をとり，それに対応する $F(x;c)=0$ の解をそれぞれ x^* と x^1 とする。すると，次の定理が成立する。

定理 6. もし，$F(x^*;c^1)\leq 0$ ならば $x^*<x^1$。これはIV節の命題1の拡張である。

我々はIV節の命題3の拡張も証明できる。それには仮定3, 4をもう少し強くする必要がある（〔3〕参照)。さて，IV節の命題2について言えば，$F(x;c)\equiv A(x)-c$ という場合であり，しかも，各 $A_i(x)$ が1次同次である時，命題2の非線型拡張は容易に示せる。F が $A(x)-c$ の形の時は，サンドバーグ〔13〕によって，已に取り扱われている。彼は $A_i(x)$ の微分可能性を仮定し，そして証明においては，ゲール=二階堂の定理を用いているが，藤本〔3〕では微分可能性は不必要だし，行列式の理論さえも用いていない。この簡単化は，上記で述べた最適化問題を利用し，$F(x;c)=0$ を解いたことによる。

本節の最後に一言追加しておこう。仮定A1からA4の下で，F が $A(x)-c$ の形の時，$A(x)$ は実は M 関数と呼ばれるものになる。この種の関数は，更に P 関数，S 関数と呼ばれるものと関連していて非常に興味深い対象である。これらについては，モレ=ラインボルト〔8〕を見られたい。

VI.

ルシャトリエの原理の応用範囲は，ミクロ，マクロの分野を問わず広い。ミクロの消費者選好，企業理論については楠本〔5, 6〕を見られたい。これはII節の結果と関連している。マクロ的計画問題への応用では森嶋〔10, 4章〕を見てもらいたい。これはIII節の結果と関連している。IV，V節の結果も価値理論，均衡理論に使われている。非線型の場合，外部性や収獲逓増をある程度許容できるので，原理の適用範囲が広められた訳である。今後の課題の一つは，ルシャトリエの原理を S 関数の体系に拡張することであろう。もちろん，その際，原理は M 関数に関するものより弱くなる。

〔参考文献〕

〔1〕 Eichhorn, W., and W. Oettli : "A General Formulation of the Le Chatelier-Samuelson Principle," *Econometrica*, 40 (1972), 711-717.

〔2〕 Fujimoto, T. : "Note on a Nonlinear Resolvent Problem," *Economic Studies Quarterly*, 29 (1978), 81-83.

〔3〕 ——, "Global Strong Le Chatelier-Samuelson Principle," *Econometrica*, to appear.

[4] Kubo, R. et al : *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. North-Holland, 1970.

[5] Kusumoto, S. : "Extensions of the Le Chatelier-Samuelson Principle and Their Application to Analytical Economics —— Constraint and Economic Analysis," *Econometrica*, 44 (1976), 509–536.

[6] ——, "Global Characterization of the Weak Le Chatelier-Samuelson Principles and Its Application to Economic Behavior, Preferences, and Utility——'Embedding Theorems'," *Econometrica*, 45 (1977), 1925–1957.

[7] Leblanc, G., and P. v. Moeseke : "The Le Chatelier Principle in Convex Programming," *Review of Economic Studies*, 43 (1976), 143–147.

[8] More, J., and W. Rheinboldt : "On P-and S-Functions and Related Classes of n-dimensional Nonlinear Mappings," *Linear Algebra and Its Applications*, 6 (1973), 45–68.

[9] Morishima, M. : *Equilibrium, Stability and Growth*. Oxford University Press, 1964.

[10] —— : *Economic Theory of Modern Society*. Cambridge University Press (the original Japanese edition from Sohbunsha, 1973).

[11] Samuelson, P. : *Foundations of Economic Analysis*. 8th Printing. Harvard University Press, 1966.

[12] —— : "An Extension of the Le Chatelier Principle," *Econometrica*, 28 (1960), 368–379.

[13] Sandberg, I. : "A Global Non-linear Extension of the Le Chatelier-Samuelson Principle for Linear Leontief Models," *Journal of Economic Theory*, 7 (1974), 40–52.