高次不確実性と市場均衡：純粋交換経済における例*

星　野　良　明

目次

概　　要

本稿では，高次不確実性，すなわち他者の情報に関する不確実性が，純粋交換経済における市場均衡に与える影響を分析する．価格形成と取引のメカニズムは，Shapley and Shubik (1977) による市場ゲームによって特定化される．Shin (1996) の示唆にしたがって特定化された純粋交換経済と情報構造のもとで，市場ゲームのベイジアン・ナッシュ均衡における財のオファー数量と他者の持つ情報に関する不確実性の程度が反比例的関係をもつことを示す．

---

*本稿は，平成12年度香川大学経済学部特別研究費による研究の一部である．
〒760-8523 香川県高松市幸町2番1号．電子メール：hoshino@ec.kagawa-u.ac.jp

1 はじめに

本稿では，高次不確実性，すなわち他者の情報に関する不確実性が，純粋交換経済における市場均衡に与える影響を分析する．2時点の差異情報を伴う純粋交換経済を考える．経済における価格形成と取引のメカニズムは，ベイジアン市場ゲームにより特定化される．差異情報は分割モデルによって描写する．そして，他者の情報に関する不確実性の程度を計測する概念を導入し，不確実性の程度と市場均衡との関係を分析する．

事象の共通知識 (common knowledge) 性の欠如を，他者の持つ情報に関する不確実性と考え，高次不確実性 (higher-order uncertainty) と本稿では呼ぶ，ある事象が共通知識となる場合，すべての主体は，「知っている」を任意の回数だけ重ねてつくられた，その事象に関する情報を知っている．このような反復的な共通知識の定義のもとで，ある事象が共通知識にならない場合，ある回数以上の「知っている」を重ねてつくられた，その事象に関する情報は，すべての主体が知り得るものにはならない．このとき，各主体が知り得る情報に関する情報のうち，「知っている」を最大の回数含む情報に注目し，その情報に含まれる「知っている」の回数で，他者の持つ情報に関する不確実性の程度を計測する．重ねられた「知っている」の回数が多いという意味で，相手の情報に関する情報は詳しい，あるいは，相手の情報に関する不確実性の程度が低い．このような相手の情報に関する不確実性(あるいは情報)の程度の考え方は，Rubinstein (1989) における almost common knowledge の概念に依拠する.[1] 本稿の情報構造は，次のような特徴を持っている：状態集合以外に共通知識となる事象が存在しない．このような特徴をもつ情報構造は，Rubinstein (1989), Shin and Williamson (1996), そして，Morris, Rob and Shin (1995) といった，情報に関する不確実性を分析する文献において利用されている．

---

1) Rubinstein (1989) の目的は，almost common knowledge の概念による情報の近さが，近い情報をもつ2つのゲームにおけるナッシュ均衡の近さを意味しないことを示すことにあった．この点では，反復的な共通知識の定義における重ねられた「知っている」の回数は，他者の情報に関する不確実性の程度を計る概念として適切さに欠ける．

経済の価格形成と取引のメカニズムは，不完全競争市場取引の一般均衡モデルのひとつである Shapley and Shubik (1977) の市場ゲーム (strategic market game) によって特定化される.[2] 本稿では2財・2タイプの消費者からなる純粋交換経済において市場ゲームを定義する．市場ゲームでは，各取引者は交換の対価として初期保有のうち何単位を提供するか(これをオファー数量と呼ぶ)を，価格形成を行う仮想的な存在である auctioneer に独立かつ同時に提出する．auctioneer は提出されたオファー数量のリストに基づいて，需給が一致するように財間の交換レートを設定する．この交換レートつまり価格に従って，各取引者が最終的に消費可能な財の数量は決定される．市場ゲームにおいては，自分の提供する財1単位が交換を希望する財何単位と交換可能なのかは，取引相手のオファー数量に依存する．ただし，初期保有がゼロのために取引相手がゼロのオファー数量を提示したにも関わらず，正のオファー数量を提示した取引者はその提示分の財を auctioneer に没収されることを仮定する．交換の完全競争市場モデルでは，市場均衡は価格と取引者が最終的に消費可能な財の数量のリストからなる．しかし，市場ゲームにおける市場均衡は，各取引者のオファー数量のリストからなる．価格と取引者が最終的に消費可能な財の数量は，オファー数量のリストによって派生的に決定される．

本稿では，取引相手の初期保有はゼロか否か，さらに自分の初期保有はゼロか否かを取引相手はわかっているかといった情報に注目し，その詳しさ・深さが取引者のオファー数量と連関しうることを，純粋交換経済の枠組みにおいて，例示する．Shapley and Shubik (1977) では情報の多様性は導入されていないので，Peck and Shell (1991) や Minelli (1995) で利用された Shapley-Shubik 市場ゲームを差異情報下にベイジアン・ゲームとして拡張したモデルを本稿では用いる．均衡概念はベイジアン・ナッシュ均衡である．この本稿の結果は，Shin (1996) に多くを依拠している． 本稿は，彼のアイディア[3] を利用して，

---

2) 情報の多様性を伴う競争的市場取引の一般均衡分析には，合理的期待均衡モデルがしばしば利用される．たとえば，Radner (1979) や Rahi (1995) を参照のこと．合理的期待均衡と市場ゲームについては，Dubey, Geanakoplos and Shubik (1987) や Minelli(1995) を見よ．本稿では，市場価格の情報伝達機能は考慮しない．

純粋交換経済の設定において高次不確実性と市場均衡の連関を分析したものである．Shin (1996) の設定は，生産者と消費者の間で，市場取引が起こる設定になっている．そこでは，消費者間の取引は考慮されていない．彼の分析の目的は，複数の取引メカニズムのパフォーマンスを情報の差異が存在する場合で比較することにあった．[4] 取引数量に注目し，decentralized market と dealership market の 2 つのメカニズムのパフォーマンスを比較している．その際，彼は他者の持つ情報に関する不確実性の程度を計測する概念を導入し，他者の持つ情報に関する不確実性と所与の経済データとを関連づける際のポイントとなる事象を識別した．

多くの文献が共通知識性の経済的帰結を分析している．これに対し，市場取引の文脈で近年ではいくつかの文献が，共通知識の欠如の経済的帰結[5] を分析している．空売り制約を伴う資産取引の動学的合理的期待均衡モデルにおいて，Allen, Morris and Postlewaite (1993) は，価格バブルが起こるならば，この事実は市場参加者間で共通知識ではない，ということを示した．また，Morris, Postlewaite and Shin (1995) は，所与の情報構造に「知識の深さ (depth of knowledge)」という概念を導入し，空売り制約を伴う資産取引の動学的合理的期待均衡モデルにおける価格バブルを分析している．Allen, Morris and Postlewaite (1993) による枠組みの中で，価格バブルのサイズが情報構造に固有な他者の持つ情報に関する不確実性の程度によって押さえられることが示されている．

本稿の構成は次のようである．第 2 節で，経済モデルとその均衡を定義する．第 3 節では，情報に関する不確実性を計測する概念を導入し，その性質を述べ

3) Shin (1996), p. 52, ll. 17-27.

4) Arrow (1953) では，不確実性下の純粋交換経済において 2 種類の市場構造，すなわち状態依存財市場の完備した市場構造と金融証券（いわゆるアロー証券）市場の完備した市場構造が定義され，それぞれの市場構造のもとでの競争均衡財配分の同値性が示されている．Peck and Shell (1989) と Weyers (1999) は，Shapley-Shubik 市場ゲームにおいてこの同値性命題を分析している．

5) ファイナンス理論における共通知識の欠如の経済的帰結に関するサーベイとしては，たとえば Allen and Morris (1998) や Brunnermeier (2001) を参考にせよ．

る．この節でのいくつかの主張の証明は補論において与えられる．第４節では，本稿の主要な結果を述べ，証明を与える．

2 モデル

2.1 純粋交換経済と情報完備の市場ゲーム

取引者の総数は有限であり，その特性（選好関係，初期保有）により２つのタイプに分かれるものとする．各タイプの取引者を添字 $t=C, M$ であらわす．各タイプの総数は $n \geqq 2$ で同一であるとする．２種類の財が存在し，それぞれの数量を x, y であらわす．各タイプの選好関係は以下の効用関数，u^C: $\mathbf{R}^2_+ \to \mathbf{R}$ と u^M: $\mathbf{R}^2_+ \to \mathbf{R}$ で特定化する[6)]：

$$u^C(x, y)=x+y,\ u^M(x, y)=x+y-y^\beta/\beta.$$

ただし，$\beta>1$ を仮定する．タイプ C の初期保有は x 財１単位のみからなり，タイプ M の初期保有は y 財１単位のみからなる．それぞれを，$e^C=1,\ e^M=1$ であらわす．

財の交換メカニズムを次のように非協力ゲームとして特定化する．タイプ C の取引者 i の利用可能な行動の集合を A_i^C であらわす．個々の行動は b_i^C であらわされ，y 財と交換するために主体 i が市場に持ち込む x 財の数量である．この x 財の数量をオファー数量と呼ぶことにする．$A^C=\prod_{i=1}^n A_i^C$ とする．同様に，タイプ M の取引者 i の利用可能な行動の集合を A_i^M であらわす．個々の行動は b_i^M であらわされ，タイプ M の主体が i が x 財と交換するために市場に持ち込む y 財の数量（オファー数量）をあらわす．$A^C=\prod_{i=1}^n A_i^C$ とする．そして，$A=A^C\times A^M$ とする．

行動の組 (b^C, b^M) を所与として，２種類の財の各主体への配分，つまり各取引者が最終的に消費可能な２財の数量は，以下の配分ルールによって決まるものとする．タイプ C の取引者 i の配分ルールとは関数 (x_i^C, y_i^C): $A\to\mathbf{R}^2_+$ で以下の条件を満たすものである：各行動の組 $b\in A$ について，

6）本稿の結果はこの効用関数の特定化に依存している．

$$(x_i^C(b),\ y_i^C(b)) = \begin{cases} \left(e^C - b_i^C,\ \dfrac{\sum b_j^M}{\sum b_j^C} b_i^C\right), & \text{if } \sum b_j^C > 0\,; \\ (e^C,\ 0), & \text{if } \sum b_j^C = 0. \end{cases}$$

また，タイプ M の取引者 i の配分ルールとは関数 $(x_i^M,\ y_i^M)$: $A \to \mathbf{R}_+^2$ で以下の条件を満たすものである：各行動の組 $b \in A$ について，

$$(x_i^M(b),\ y_i^M(b)) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sum b_j^C}{\sum b_j^M} b_i^M,\ e^M - b_i^M\right), & \text{if } \sum b_j^M > 0\,; \\ (0,\ e^M), & \text{if } \sum b_j^M = 0. \end{cases}$$

この配分ルールの意味を説明する．もしある取引者のオファー数量が正であり，その他の取引者のオファー数量がゼロであるならば，持ち込んだ財は没収される．すなわち，もし $\sum b_j^C > 0$ かつ $\sum b_j^M = 0$(resp. $\sum b_j^M > 0$ かつ $\sum b_j^C = 0$) ならば，$(x_i^C(b),\ y_i^C(b)) = (e^C - b_i^C,\ 0)$, (resp. $(x_i^M(b),\ y_i^M(b)) = (0,\ e^M - b_i^M)$).

タイプ C の取引者 i の利得関数 v^C: $A \to \boldsymbol{R}$ は次のように定義される：

$$\begin{aligned} v_i^C(b) &= u_i^C(x_i^C(b),\ y_i^C(b)) \\ &= \begin{cases} e^C - b_i^C + \dfrac{\sum b_j^M}{\sum b_j^C} b_i^C, & \text{if } \sum b_j^C > 0\,; \\ e^C, & \text{if } \sum b_j^C = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

また，タイプ M の取引者 i の利得関数 v^M: $A \to \boldsymbol{R}$ は次のように定義される：

$$\begin{aligned} v_i^M(b) &= u_i^M(x_i^M(b),\ y_i^M(b)) \\ &= \begin{cases} \dfrac{\sum b_j^C}{\sum b_j^M} b_i^M + e^M - b_i^M - \dfrac{(e^M - b_i^M)^\beta}{\beta}, & \text{if } \sum b_j^M > 0\,; \\ e^M - \dfrac{(e^M)^\beta}{\beta}, & \text{if } \sum b_j^M = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

以上の行動の集合と利得関係で定義される，すべてのプレーヤーがゲームの構成要素に関して完全な知識をもつ情報完備の戦略形ゲームを考える．このゲームは以下の手順でプレイされるものとする：各取引者は独立かつ同時にオファー数量を auctioneer に提出する．次に，auctioneer は提出されたオファー数量のリストを参考にして需給が一致するように(つまり，配分ルールに従って)価格と財配分を決定する．最後に各取引者はその財配分に応じた利得を得る．

上述の配分ルールは，価格を媒介とした取引として，次のように解釈される．行動の組 $b \in A$ を所与として，auctioneer は x 財で測った y 財の価格を

$$p_y(b^M,\ b^C) = \frac{\sum b_j^C}{\sum b_j^M} \quad \text{if } \sum b_j^C > \text{かつ} \sum b_j^M > 0$$

と設定する．一単位の y 財は p_y 単位の x 財と市場において交換可能である．そして，タイプ C の取引者 i は b_i^C 単位の x 財と交換に $\frac{b_i^C}{p_y}$ 単位の y 財を得る．また，タイプ M の取引者 i は b_i^M 単位の y 財と交換に $p_y \cdot b_i^M$ 単位の x 財を得る．もし $\sum b_j^C = 0$ かつ $\sum b_j^M = 0$ ならば，取引は起こらない．この場合，タイプ C の取引者は全員 x 財のみからなる初期保有を消費し，タイプ M の取引者は全員 y 財のみならなる初期保有を消費する．もし $\sum b_j^C = 0$ または $\sum b_j^M = 0$ であるならば，取引は起こらない．そして，すべての持ち込まれた財は没収される．よって，タイプ C のすべての取引者は消費ベクトル $(e^C - b_i^C,\ 0)$ を消費し，タイプ M のすべての取引者は消費ベクトル $(0,\ e^M - b_i^M)$ を消費する．$\sum b_j^C > 0$ かつ $\sum b_j^M = 0$ のとき，比率 $\frac{\sum b_j^C}{0}$ は定義されない．しかし，その比率を $+\infty$ と解釈するならば，y 財で測った x 財の価格はゼロとなる．よって，たとえタイプ C の取引者が正の量の x 財を市場に持ち込んでも，彼は正の量の y 財を受け取ることはできない．また，$\sum b_j^C = 0$ かつ $\sum b_j^M > 0$ のとき，比率 $\frac{0}{\sum b_j^M}$ はゼロとなる．よって，y 財で測った x 財の価格は $+\infty$ と解釈できる．もしタイプ C の取引者が正の量の x 財を市場に持ち込めば，任意の量の y 財を受け取ることができる．しかし，$\sum b_j^C = 0$ かつ $\sum b_j^C \geqq 0$ であるから，$b_j^C = 0$ となる．よって，タイプ C には全く y 財は配分されず，彼らは初期保有 $e^C = 1$ を消費する．

この節の最後に，分析の出発点としてこの情報完備の市場ゲームのナッシュ均衡を具体的に求める．$(b^C,\ b^M) \in A$ をナッシュ均衡とすれば，次の最適反応の条件を満たす．b_i^C は次の問題の解である：

$$\max_{b' \in \mathbb{R}+} (1 - b') + \frac{\sum b_j^M}{b' + \sum_{j \neq i} b_j^C} b'$$

$$\text{subject to } 0 \leqq b' \leqq 1.$$

そして，b_i^M は次の問題の解である：

$$\max_{b'\in R+}\frac{\sum b_j^C}{b'+\sum_{j\neq i} b_j^M}b'+(1-b')-\frac{(1-b')^\beta}{\beta}$$

subject to $0 \leqq b' \leqq 1$.

各 i について $b_i^M>0$ かつ $b_i^C>0$ を仮定し，上記の問題の最適化の一階条件をもとめる．利得関数は微分可能であるから，タイプ C の取引者 i の一階条件は，

$$-1+\left(\frac{\sum b_j^M}{\sum b_j^C}\right)\left(\frac{\sum b_j^C-b_i^C}{\sum b_j^C}\right) \geqq 0.$$

そして，タイプ M の取引者 i の一階条件は，

$$\left(\frac{\sum b_j^C}{\sum b_j^M}\right)\left(\frac{\sum b_j^M-b_i^M}{\sum b_j^M}\right)-1+(1-b_i^M)^{\beta-1} \geqq 0.$$

各 $i=1, \cdots, n$ について，$b_*^C=b_i^C$ かつ $b_*^M=b_i^M$ である対称的な均衡 (b_*^C, b_*^M) に注目する[7] このとき，(b_*^C, b_*^M) は次の二つの条件を満たす：

$$\frac{b_*^C}{b_*^M} \leqq \frac{n-1}{n};$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{b_*^C}{b_*^M}\right)-1+(1-b_*^M)^{\beta-1} \geqq 0.$$

$b_*^C<1$ かつ $b_*^M<1$ が成立するが，その理由は次のようである：まず，$b_*^C=1$ かつ $b_*^M=1$ を仮定する．このとき，最適反応の一階の条件から，$1 \leqq \frac{n-1}{n}$. $n \geqq 2$ であるから，これは矛盾．$b_*^C=1$ かつ $b_*^M<1$ を仮定する．このとき，最適反応の一階の条件から $\frac{b_*^C}{b_*^M}<\frac{n-1}{n}$ を得る．よって，$b_*^M>1$ である．これは矛盾．また，もし $b_*^C<1$ かつ $b_*^M=1$ ならば，$b_*^C>1$ である．これは矛盾．よって，一階の条件は等号で成立する[8] このことから，

7）以下では，対称的な均衡を表記する場合，全取引者の行動（または行動計画）を $2n$ 個すべて並べたリストではなく，各タイプの行動（または行動計画）のみを並べたペア，たとえば (b_*^C, b_*^M)，であらわすことがある．

8）$(b_{-i}^C, b^M)\gg 0$ を満たす $(b^C, b^M)\in A$ を所与として，$g_i^C(b)$ を次のように定義する：

$$g_i^C(b)=\left\{(x, y)\in \boldsymbol{R}_+^2 \mid x \leqq 1-b' \text{ and } y \leqq \frac{b'}{p_y(b', b_{-i}^C, b^M)} \text{ for some } 0 \leqq b' \leqq 1\right\},$$

ここで，$p_y(b', b_{-i}^C, b^M)=\dfrac{b'+\sum_{j\neq i} b_j^C}{\sum_j b_j^M}$ である．もし $e_i^C=1$ ならば，タイプ C の取引者 i の

$$b_*^M = 1 - \left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{\beta-1}}; \tag{1}$$

$$b_*^C = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left\{1 - \left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{\beta-1}}\right\} \tag{2}$$

を得る．$n \geqq 2$ を仮定したから，$b_*^M > 0$ かつ $b_*^C > 0$ である．よって，対称的なナッシュ均衡 (b_*^M, b_*^C) を得た．

2.2 差異情報の導入とベイジアン市場ゲーム

前節で定義された情報完備の戦略形ゲームに情報の差異を導入したベイジアン・ゲームを考える．各タイプは他のタイプの初期保有を知らない状況を考える．本稿の設定では，各主体は各主体の行動が市場で成立する価格に与える影響を考慮して，自らの行動を選択する．

各タイプの初期保有量は取引量を決定する時点（第 0 時点）では不確実である．取引が実行され財の受渡しが行われる時点（第 1 時点）では実現した状態は周知の事実となり，不確実性は解消するものと仮定する．

次のような世界の状態の集合[9]を考える：

$$\Omega = \{(q,\ r) \in \{0,\ 1,\ \cdots,\ N\} \times \{0,\ 1,\ \cdots,\ N\} \mid q = r \text{ または } q = r-1\}.$$

個々の状態は ω で記す．各状態は過去 N 日間における沿岸部の降水日数 q と山岳部の降水日数 r の可能な組み合わせと解釈しよう．条件 $q = r$ または $q = r-1$ は沿岸部と山岳部の降水日数にはある相関があることを意味する．各タイプは Ω 上の共通の事前確率，π を持つ．各状態は同確率で生起すると信じられているものとする．このとき，各状態 ω について，$\pi(\omega) = 1/(2N+1)$ となる．

0 時点で，各タイプは私的情報をもつ．タイプ C の取引者は沿岸部の降水日数のみ観察可能であり，タイプ M の取引者は山岳部の降水日数のみ観察可能である．この状況は次の条件を満たす Ω 上の同値関係 $\overset{C}{=}$ と $\overset{M}{=}$ によって定式化さ

予算集合は $g_i^C(b)$ である．この集合 $g_i^C(b)$ は強い意味で凸である．このとき，彼の効用関数の形状から，最適消費計画は内点になる．タイプ M についても同様．

9) 本稿の情報構造の特定化とその解釈は，Shin (1996) に依拠している．

れる：

$$(q,\ r)\overset{C}{\doteq}(q',\ r')\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}q=q';\qquad (q,\ r)\overset{M}{\doteq}(q',\ r')\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}r=r'.$$

このとき，各タイプの情報のあり方は同値関係$\overset{C}{\doteq}$と$\overset{M}{\doteq}$によってそれぞれ導かれるΩ上の分割によって描写される．これらの分割を$\boldsymbol{I}^C$と$\boldsymbol{I}^M$で記す.[10] 部分集合$E\subset\Omega$は事象と呼ばれ，社会状況のひとつの記述である．$\omega\in\Omega$が真の状態であるとき，$\omega\in E$であることを事象Eが起こっている，という．また，状態$\omega\in\Omega$が起こったとき，$\omega\in E$であるか$\omega\notin E$であるかわかる，という意味で，Eは，情報と呼ぶことができる（シグナルと呼ぶ場合もある）．各タイプtの情報の集まり$\boldsymbol{I}^t$は情報分割と呼ばれる．$\omega=(q,\ r)\in\Omega$に対して，ωを含む情報分割の元を$\boldsymbol{I}^t(\omega)$または$\boldsymbol{I}^t(q,\ r)$で記す．

例えば，(1, 1)が起こったとき，タイプCは$\{(1,\ 1),\ (1,\ 2)\}$が起こっていることがわかり，さらに，これら以外の状態が起きていないこともわかる．$\omega\in\Omega$と$E\subset\Omega$に対して$\boldsymbol{I}^t(\omega)\subset E$であるとき，$\omega\in E$であるから，タイプ$t$の取引者は$\omega$において$E$が起きていることを（または単に，$E$を）知っている，ということにする．両タイプの初期保有が1であるような事象，

$$G^*=\{(q,\ r)\in\Omega|q\geqq 1,\ r\geqq 1\}$$

を考えると，$\boldsymbol{I}^C(1,\ 1)\subset G^*$より，(1, 1)においてタイプ$C$は$G^*$を（つまり，両タイプの初期保有が1であることを）知っている．しかし，$\boldsymbol{I}^M(1,\ 1)\not\subset G^*$より，(1, 1)においてタイプ$M$は$G^*$を（つまり，両タイプの初期保有が1であることを）知らない．これは，(1, 1)においてMが沿岸部の降水日数がゼロである可能性を排除できないからである．世界の状態の集合Ω，情報分割の組$(\boldsymbol{I}^C,\ \boldsymbol{I}^M)$，そして$\Omega$上の共通の事前分布$\pi$の組$(\Omega,\ (\boldsymbol{I}^C,\ \boldsymbol{I}^M),\ \pi)$を情報構造と呼ぶ．

各タイプの第1時点における初期保有を以下のような条件を満たす$e^C:\Omega\to\mathbf{R}_+$と$e^M:\Omega\to\mathbf{R}_+$によってあらわす：

10）$\boldsymbol{I}^C$と$\boldsymbol{I}^M$は具体的に次のように書き下せる：

$$\boldsymbol{I}^C=\{\{(0,\ 0),\ (0,\ 1)\},\ \cdots,\ \{(N-1,\ N-1),\ (N-1,\ N)\},\ (N,\ N)\};$$
$$\boldsymbol{I}^M=\{(0,\ 0),\ \{(0,\ 1),\ (1,\ 1)\},\ \cdots,\ \{(N-1,\ N),\ (N,\ N)\}\}.$$

$$e^{C}(\omega)=\begin{cases}0, & \text{if } \omega=(0,\ 0) \text{ or } (0,\ 1)\\ 1, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$e^{M}(\omega)=\begin{cases}0, & \text{if } \omega=(0,\ 0)\\ 1, & \text{otherwise}\end{cases}$$

この経済では，各主体は私的情報を所与とすれば自分自身の特性については不確実性に直面していない．しかし，他の主体の特性については不確実性に直面している．

タイプ C の取引者 i の純粋戦略は次の情報制約を満たす Ω から A_i^C への関数 B_i^C である：各 ω について，

$$\omega' \in \boldsymbol{I}^M(\omega) \Longrightarrow B_i^C(\omega)=b_i^C(\omega').$$

また，タイプMの取引者 i の純粋戦略は次の情報制約を満たす Ω から A_i^M への関数 B_i^M で

$$\omega' \in \boldsymbol{I}^M(\omega) \Longrightarrow B_i^M(\omega)=B_i^M(\omega').$$

各タイプ $t=C,\ M$ の純粋戦略の集合を $\boldsymbol{B}^t$ であらわす.[11] 情報制約から，タイプ C の取引者 i の純粋戦略は沿岸部の降水日数の関数と見なすことができる．そこで，記号の節約をするために，沿岸部の降水日数の関数と見なしたときのタイプ C の取引者 i の純粋戦略を便宜上，$B_i^C:\{0,\ 1,\ \cdots,\ N\}\rightarrow A_i^C$ であらわす．また，同様に，情報制約から，タイプ M の取引者 i の純粋戦略は山岳の降水日数の関数と見なすことができ，それを便宜上，$B_i^M:\{0,\ 1,\ \cdots,\ N\}\rightarrow A_i^M$ であらわす．

各戦略の組 $(B^C,\ B^M)$ に対して，状態 $\omega\in\Omega$ におけるタイプ C の取引者 i の条件付き期待利得を次のように定義する：

$$Ev_i^C(B^C,\ B^M,\ \omega)=\sum_{\omega'\in\Omega} v_i^C((B_i^C(\omega),\ B_{-i}^C(\omega')),\ B^M(\omega'))\pi(\omega'|\boldsymbol{I}^C(\omega)),$$

そして，状態 $\omega\in\Omega$ におけるタイプ M の取引者 i の条件付き期待利得を次のように定義する：

$$Ev_i^M(B^M,\ B^C,\ \omega)=\sum_{\omega'\in\Omega} v_i^M((B_i^M(\omega),\ B_{-i}^M(\omega')),\ B^C(\omega'))\pi(\omega'|\boldsymbol{I}^M(\omega)).$$

---

11) 本稿では，混合戦略は考慮せず，純粋戦略のみを考える．

以上の情報構造，戦略集合，利得関数で定義される，ベイジアン・ゲームを考える．このゲームは以下の手順でプレイされる．事前確率 π に従って世界の状態が実現する．実現した状態に依存して，各タイプの各取引者は私的情報を受け取り，また，各タイプの取引者の初期保有が実現する．各取引者とは独立かつ同時にオファー数量を auctioneer に提出する．次に，auctioneer は提出されたオファー数量のリストを参考にして需給が一致するように価格と財配分を決定する．最後に各取引者はその財配分に応じた利得を得る．

均衡概念としては，ベイジアン・ナッシュ均衡を採用する．つまり，各状態 $\omega \in \Omega$ において，各取引者 i の戦略は他のプレーヤーの戦略を所与として，ω における私的情報による条件付き期待値を最大にする．

定義 2.1 ベイジアン・ナッシュ均衡とは以下の条件を満たす戦略の組 (B^C, B^M) である：各 $i = 1, \cdots, n$ と $\omega \in \Omega$ に対して，

(BNE-C) $\hat{B}_i^C \leqq e^C$ を満たす任意の戦略 $\hat{B}_i^C \in \boldsymbol{B}^C$ について，

$$Ev_i^C(B^C, B^M, \omega) \geqq Ev_i^C(\hat{B}_i^C, B_{-i}^C, B^M, \omega);$$

(BNE-M) $\hat{B}_i^M \leqq e^M$ を満たす任意の戦略 $\hat{B}_i^M \in \boldsymbol{B}^M$ について，

$$Ev_i^M(B^M, B^C, \omega) \geqq Ev_i^M(\hat{B}_i^M, B_{-i}^M, B^C, \omega).$$

ベイジアン・ナッシュ均衡 (B^C, B^M) が対称的 (symmetric) であるとは，各 $i, j = 1, \cdots, n$ について $B_i^M = B_j^M$ かつ $B_i^C = B_j^C$ であることをいう．以下の節では，対称的なベイジアン・ナッシュ均衡のみに注目して議論を進める．

戦略の組 $(0, 0) \in A$ はベイジアン・ナッシュ均衡である．配分ルールの定義から，相手のタイプの行動 0 を所与として，各タイプの最適な行動は 0 である．相手のタイプの行動 0 を所与とした場合，正の量の初期保有を市場に持ち込んでも没収されるだけである．戦略の組 (B^C, B^M) で各 $\omega \in \Omega$ と $i = 1, \cdots, n$ について，$B_i^M(\omega) = 0$ かつ $B_i^C(\omega) = 0$ を満たすものは，無取引 (no-trade) ベイジアン・ナッシュ均衡と呼ばれる．本稿では，無取引でない均衡に注目して議論を進める．

3 共通知識の欠如としての高次不確実性

3.1 共通知識

以下では特に両タイプの初期保有が1である事象 G^* に関する不確実性に注目する．各タイプは，相手の初期保有を正確にわからず，かつ，相手のオファー数量がゼロであった場合，初期保有のうち市場に持ち込んだ分は没収されてしまう．よって，お互いに，相手の初期保有がゼロでないかどうか（つまり，事象 G^* が起きているか否か)が，取引者達の利害に直結する問題になる．本稿の情報構造のもとでは，自分の情報をもとに相手の状況について推論を重ねていく[12]と，相手の初期保有がゼロである可能性を排除できなくなる．相手が G^* を知っていれば，相手の初期保有がゼロではないから，結局，相手が G^* を知っているか否かがポイントとなる．このとき，G^* に関して推論を重ねていくことは，「知っている」を任意の回数だけ重ねてつくられた，G^* に関する情報を知っているか否かを確認する作業に対応する．このことから，互いに相手の初期保有が0であることを排除できないことは，事象 G^* がどの状態においても共通知識にはならない，と表現される．この小節では本稿の情報構造において，事象 G^* がどの状態においても共通知識にはならない[13]ことを確認する．

情報分割から，各タイプ t の知識オペレーター K^t: $2^\Omega \to 2^\Omega$ を次のように定義する：各事象 $E \subset \Omega$ について，

$$K^t(E) = \{\omega \in \Omega | \boldsymbol{I}^t(\omega) \subset E\}.$$

$K^t(E)$ は「タイプ t の取引者は事象 E を知っている」という事象である．オペレーターの列 $(K^k)_{k=1}^{\infty}$ を帰納的に次のように定義する：各事象 $E \subset \Omega$ について，$K^1(E) = K^M(E) \cap K^C(E)$，かつ $K^k(E) = K^M(K^{k-1}(E)) \cap K^C(K^{k-1}(E))$．そして，$CK(E) = \bigcap_{k=1}^{\infty} K^k(E)$ とおく．このとき，事象 E が ω において共通

12) この推測においては，各取引者は自分の情報分割だけでなく，相手の情報分割も利用している．相手の推測する状況の自分も考慮にいれて，相手の状況を推測することになる．このことは，自分の情報に照らしてあり得ない状況も，相手が考慮しているからという理由で，考慮にいれる必要がでてくることを意味する．

13) 他者の情報に関する情報（あるいは，不確実性）を議論するためには，各取引者が情報構造を知っており，そして，このことが周知の事実になっていることが前提とされる．

知識であるとは，$\omega \in CK(E)$ であることをいう．

$K^1(E)$ は「事象 E を両タイプの取引者は知っている」という事象である．そして，$K^2(E)$ は「「両タイプの取引者は事象 E を知っている」ことを両タイプの取引者は知っている」という事象である．一般に，$K^k(E)$ は「……「「事象 E を両タイプの取引者は知っている」ことを両タイプの取引者は知っている」ことを両タイプの取引者は知っている」という事象である．ここで，上述の主張中の「 」の数は k であり，「知っている」の連鎖が k 回続いている．任意の k 回の「知っている」の連鎖を含む，事象 E に関する情報を各主体が知り得るとき，事象 E は共通知識になっている．

事象 G^* がどの状態においても共通知識にはならないことを確認するために，次のような帰納的に定義される反復的な知識オペレーターの列 $((K^MK^C)^k)_{k=1}^{\infty}$ を考える：各事象 $E \subset \Omega$ について，

$$(K^MK^C)^1(E) = K^M(K^C(E));$$

$$(K^MK^C)^k(E) = K^M(K^C((K^MK^C)^{k-1}(E))).$$

$(K^MK^C)^1(E)$ は「事象 E をタイプ C が知っていることをタイプ M が知っている」という事象である．$(K^MK^C)^k(E)$ は「事象 $(K^MK^C)^{k-1}(E)$ をタイプ C が知っていることをタイプ M が知っている」という事象である．同様に $((K^CK^M)^k)_{k=1}^{\infty}$ も定義する．

このとき，2 種類の事象 $(K^MK^C)^k(G^*)$, $(K^CK^M)^k(G^*)$ は次のように明示的に書くことができる．[14)]

補題 3.1 各 $k = 1, 2, \cdots, N-1$ について，

(1) $(K^MK^C)^k(G^*) = \{(q, r) \in \Omega | q \geqq k, r \geqq k+1\}$;

(2) $(K^CK^M)^k(G^*) = \{(q, r) \in \Omega | q \geqq k+1, r \geqq k+1\}$.

この補題の主張(1)の証明については，Shin (1996), Lemma 1, pp. 47-48 を参照のこと．主張(2)の証明は補論で与える．この補題から，G^* がどの状態においても共通知識とはならないことが証明される．

14) この補題の主張(1)は，Shin (1996), Lemma 1, p. 47 である．

系 3.1 すべての世界の状態において，事象G^*は共通知識ではない。

この系[15]の証明は，補論を参照のこと。

3.2 高次不確実性の程度の計測

ある事象が共通知識となる場合，すべての主体は，「知っている」を任意の回数だけ重ねてつくられたその事象に関する事象を，知っている。しかし，ある事象が共通知識にならない場合，ある回数以上の「知っている」を重ねてつくられた，その事象に関する情報は，すべての主体が知り得るものにはならない。本稿の設定では，事象 G^* は共通知識にはならないから，各取引者は，推論のある段階で，相手の初期保有が1であることがわからなくなる。相手の初期保有が1であることがわからなくなってしまう直前の段階において重ねられた「知っている」の回数が多いという意味で，相手の情報に関する情報は詳しい，あるいは，相手の情報に関する不確実性の程度が低いということにする。[16]

定義 3.1 各事象 $E\subset\Omega$ について，E に関するタイプ C の知識の深さとは次のように定義される関数 DK_E^C: $\Omega\to\{0, 1, \cdots\}$ である：各 $\omega\in\Omega$ について，

$$DK_E^C(\omega)=\begin{cases}0, & \text{if } \omega\notin(K^CK^M)^1(E);\\ k, & \text{if } \omega\in(K^CK^M)^k(E) \text{ かつ } \omega\notin(K^CK^M)^{k+1}(E).\end{cases}$$

また，各事象 $E\subset\Omega$ について，事象 E に関するタイプ M の知識の深さとは次のように定義される関数 DK_E^M: $\Omega\to\{0, 1, \cdots\}$ である：各状態 $\omega\in\Omega$ について，

$$DK_E^M(\omega)=\begin{cases}0, & \text{if } \omega\notin(K^MK^C)^1(E);\\ k, & \text{if } \omega\in(K^MK^C)^k(E) \text{ かつ } \omega\notin(K^MK^C)^{k+1}(E).\end{cases}$$

もし ω におけるタイプ M の事象 E に関する知識の深さが k ならば，E に関して「知っている」を k 回重ねた情報を取引者はわかるが，もう一回「知って

15) Shin (1996), p. 48 における主張である。
16) この考え方は，Rubinstein (1989) と Shin (1996) による。Rubinstein (1989) は almost common knowledge と，Shin (1996) は transparency と呼んでいる。

いる」を重ねた情報はわからない．もし事象 E の ω における知識の深さがゼロならば，取引者は相手が事象 E を知っていることすら知らないことになる．そして，k の値が大きいほど，相手の情報に関する不確実性は低くなっている．以下の議論では，特に事象 G^* に関する各タイプの知識の深さに注目する．

各状態ごとで，相手の初期保有が 1 であること（つまり，相手が G^* を知っていること）がわからなくなってしまう段階は異なる．より深い段階まで相手の初期保有が 1 であることを知ることができるならば，自分の地域の降水日数はより多くなっていることを示すのが次の補題[17]である．

補題 3.2　任意の 2 つの状態 $\omega=(q,\ r)$, $\omega'=(q',\ r')\in\Omega$ について，

(1)　$DK_{G^*}^C(\omega)<DK_{G^*}^C(\omega')\Longrightarrow q<q'$;

(2)　$DK_{G^*}^M(\omega)<DK_{G^*}^M(\omega')\Longrightarrow r<r'$.

この補題の証明は，補論で与える．実は，この補題の逆の主張が，条件付きではあるが成立する．この点については第 5 節で触れる．

4　高次不確実性が市場均衡に与える影響

4.1　結　果

本稿のモデルでは，各取引者は G^* についてより深い知識を持てば持つほど，より多くのオファー数量を提示する.[18] G^* についてより深い知識は，両タイプの初期保有が 1 であり，取引の成立する可能性がより高いことを意味する．取引の成立する可能性が高い，つまり，財を没収される可能性が低ければ低いほど，取引者はより多くのオファー数量を提示することになる．

命題 4.1　$(B^C,\ B^M)$ を対称的なベイジアン・ナッシュ均衡とし，各 $k=1,\ \cdots,\ N$ について $B^C(k)>0$ かつ $B^M(k)>0$ が満たされるものとする．

(1)　$B^M(N)<b_*^M$ を仮定する．このとき，各タイプ $t=C,\ M$ と任意の 2 つの状

17）　この主張は Shin (1996), p. 51 である．

18）　この結果は Shin (1996), Theorem 1, p. 49 の第 2 番の主張を修正したものになっている．

態 ω, $\omega' \in \Omega$ について,

$$DK_{G^*}^t(\omega) < DK_{G^*}^t(\omega') \Longrightarrow B^t(\omega) < B^t(\omega').$$

(2) $B^M(N) \geqq b_*^M$ を仮定する．このとき，各タイプ $t = C, M$ と任意の 2 つの状態 ω, $\omega' \in \Omega$ について,

$$DK_{G^*}^t(\omega) < DK_{G^*}^t(\omega') \Longrightarrow B^t(\omega) \geqq B^t(\omega').$$

Shin (1996) の設定では，対称的なベイジアン・ナッシュ均衡において，$B^M(N) < b_*^M$ が成立する[19] ことを示すことができる．しかし，純粋交換経済という本稿の枠組みにおいては， $B^M(0)$, $B^M(1)$, ⋯, $B^M(N)$ を変数とする連立方程式を得られない．本稿の設定では，各主体の最適反応の一階条件からは $B^M(1)$, ⋯, $B^M(N)$ を変数とする連立方程式しか得られないのである．このため，$B^M(0)$ と $B^M(N)$ の大小関係が決定されない．そのため，(2)の場合を排除できない．

4.2 証　明

この小節では命題 4.1 の証明を与える．戦略の $[(B_i^C)_i, (B_i^M)_i]$ をベイジアン・ナッシュ均衡とする．定義 2.1 における均衡条件 (BNE-C) と (BNE-M) を書き下し，オファー数量を変数とする連立方程式として各タイプの最適反応の一階条件を導く．

タイプ C について：タイプ C の各取引者がシグナル $k = 0$ を受け取るとき，真の状態は (0, 0) か (0, 1) のどちらかである．そして，彼の初期保有はゼロである．よって，行動 $0 \in A_i^C$ が他の取引者のいかなる戦略に対しても $k = 0$ においては最適な反応である．つまり，$B_i^C(0) = 0$.

タイプ C の各取引者 i について，シグナル $1 \leqq k \leqq N-1$ を所与として行動 $B_i^C(k)$ は次の最適反応の条件を満たす：任意の $0 \leqq b' \leqq 1$ について,

$$\frac{1}{2}\left\{(1-B_i^C(k)) + \frac{\sum B_j^M(k)}{\sum B_j^C(k)} B_i^C(k)\right\} + \frac{1}{2}\left\{(1-B_i^C(k)) + \frac{\sum B_j^M(k+1)}{\sum B_j^C(k)} B_i^C(k)\right\}$$

19) この結果は Shin (1996), Theorem 1, p. 49 の最初の主張である．

$$\geqq \frac{1}{2}\left\{(1-b')+\frac{\sum B_j^M(k)}{b'+\sum_{j\neq i} B_j^C(k)}b'\right\}+\frac{1}{2}\left\{(1-b')+\frac{\sum B_j^M(k+1)}{b'+\sum_{j\neq i} B_j^C(k)}b'\right\}.$$

タイプ C の取引者 i がシグナル $k=N$ を受け取ったとき，真の状態は (N, N) である．よって，均衡行動 $B_i^C(N)$ は次の最適反応の条件を満たす：任意の $0\leqq b'\leqq 1$ について，

$$1-B_i^C(N)+\frac{\sum B_j^M(N)}{\sum B_j^C(N)}B_i^C(N)\geqq 1-b'+\frac{\sum B_j^M(N)}{b'+\sum_{j\neq i} B_j^C(N)}b'.$$

タイプ M について：タイプ M の取引者がシグナル $k=0$ を受け取ったとき，真の状態は $(0, 0)$ である．このとき彼の初期保有はゼロである．よって，他の取引者のいかなる戦略に対しても $0\in A_i^M$ が $k=0$ における彼の最適反応である．つまり，$B_i^M(0)=0$.

タイプ M の各取引者について，シグナル $1\leq k\leq N$ を所与として彼の均衡行動 $B_i^M(k)$ は次の最適反応の条件を満たす：任意の $0\leqq b'\leqq 1$ について，

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\sum B_j^C(k-1)}{\sum B_j^M(k)}\sum B_j^M(k)+(1-B_i^M(k))-\frac{(1-B_i^M(k))^\beta}{\beta}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{B_i^C(k)}{\sum B_j^M(k)}\sum B_j^M(k)+(1-B_i^M(k))-\frac{(1-B_i^M(k))^\beta}{\beta}\right\}$$

$$\geqq\frac{1}{2}\left\{\frac{\sum B_j^C(k-1)}{b'+\sum_{j\neq i} B_j^M(k)}b'+(1-b')-\frac{(1-b')^\beta}{\beta}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{B_i^C(k)}{b'+\sum_{j\neq i} B_j^M(k)}b'+(1-b')-\frac{(1-b')^\beta}{\beta}\right\}.$$

最初に，各状態において各取引者は初期保有のすべてを提示しないことを示す．取引者がシグナル $k=0$ を受け取ったときには，彼の初期保有はゼロであるから，彼のオファー数量もゼロとなる．

補題 4.1 対称的なベイジアン・ナッシュ均衡 (B^C, B^M) を所与として，各 $k=1, \cdots, N$ について，$B^C(k)<1$ かつ $B^M(k)<1$ である．

証明：ある非空の主体の集合 $J\subset\{1, \cdots, N\}$ が存在して，各 $k\in J$ について $B^C(k)=1$ を満たすとする．タイプ C の最適反応の一階条件は，次のようにな

る：$k \in J$ かつ $k \neq N$ の場合，

$$\frac{\partial Ev_i^C}{\partial b_i^C}(B^C,\ B^M,\ k) = -1 + \left(\frac{\sum B_j^M(k) + \sum B_j^M(k+1)}{2}\right)\left(\frac{\sum B_j^C(k) - B_i^C(k)}{(\sum B_j^C(k))^2}\right) \geqq 0\,;$$

$k \in J$ かつ $k = N$ の場合，

$$\frac{\partial Ev_i^C}{\partial b_i^C}(B^C,\ B^M,\ k) = -1 + \sum B_j^M(k)\left(\frac{\sum B_j^C(k) - \sum B_i^C(k)}{(\sum B_j^C(k))^2}\right) \geqq 0.$$

対称的な均衡に注目しているから，

$$B^C(k) \leqq \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{B^M(k) + B^M(k+1)}{2}\right) \qquad \text{if } k \in J \text{ and } k \neq N\,;$$

$$B^C(k) \leqq \left(\frac{n-1}{n}\right)B^M(k) \qquad \text{if } k \in L \text{ and } k = N.$$

仮定より，$k \in J$ かつ $k \neq N$ の場合，$B^M(k) > 1$ または $B^M(k+1) > 1$ であり，$k \in J$ かつ $k = N$ の場合，$B^M(N) > 1$ である．このことは，$(B^C,\ B^M)$ が均衡であることに矛盾する．よって，$J = \emptyset$ である．すなわち，各 $k = 1, \cdots, N$ について，$B^C(k) < 1$.

次に，各 $k = 1, \cdots, N$ について，$B^M(k) < 1$ を示す．ある非空のプレーヤーの集合 $J \subset \{1, \cdots, N\}$ が存在して，各 $k \in J$ について，$B^M(k) = 1$ を満たすとする．タイプ M の最適反応の一階条件は，次のようになる：$k \in J$ の場合，

$$\frac{\partial Ev_i^M}{\partial b_i^M}(B^M,\ B^C,\ k)$$

$$= \left(\frac{\sum B_j^C(k-1) + \sum B_j^C(k)}{2}\right)\left(\frac{\sum B_j^M(k) - B_i^M(k)}{(\sum B_j^M(k))^2}\right) - 1 + (1 - B_i^M(k))^{\beta-1} \geqq 0.$$

対称的な均衡に注目しているので，

$$B^M(k)\{1 - (1 - B^M(k))^{\beta-1}\} \leqq \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{B^C(k-1) + B^C(k)}{2}\right) \quad \text{if } k \in J.$$

$B^C(0) = 0$ かつ $k = 1, \cdots, N$ について $B^C(k) < 1$ であるから，$k \in J$ の場合，$B^M(k)\{1 - (1 - B^M(k))^{\beta-1}\} < 1$ である．$k \in J$ ならば $B^M(k) = 1$ を仮定したから，不等式の左辺は 1 に等しい．これは矛盾．よって，$J = \emptyset$．すなわち，各 $k = 1, \cdots, N$ について $B^M(k) < 1$. ■

よって，対称的なベイジアン・ナッシュ均衡 (B^C, B^M) において，両タイプの最適化の一階条件は次の連立不等式になる：

$$\frac{\partial Ev_i^C}{\partial b_i^M}(B^C, B^M, k) = -1+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{B^M(k)+B^M(k+1)}{B^C(k)}\right)$$
$$\leqq 0 \qquad \text{if } k=1, \cdots, N-1;$$

$$\frac{\partial Ev_i^C}{\partial b_i^C}(B^C, B^M, k) = -1+\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{B^M(k)}{B^C(k)}\right)$$
$$\leqq 0 \qquad \text{if } k=N;$$

$$\frac{\partial Ev_i^M}{\partial b_i^C}(B^M, B^C, k) = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{B^C(k-1)+B^C(k)}{B^M(k)}\right)$$
$$-1+(1-B^M(k))^{\beta-1}$$
$$\leqq 0 \qquad \text{if } k=1, \cdots, N.$$

以下では，各 $k=1, \cdots, N$ について $B^C(k)>0$ かつ $B^M(k)>0$ である均衡にのみを分析の対象とする．このとき，均衡は次の最適化の一階条件を満たす：

$$B^C(k) = \begin{cases} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)\left(\dfrac{B^M(k)+B^M(k+1)}{2}\right), & \text{if } 1 \leqq k \leqq N-1; \\ \left(\dfrac{n-1}{n}\right)B^M(k), & \text{if } k=N. \end{cases} \tag{3}$$

$$B^M(k)\{1-(1-B^M(k))^{\beta-1}\} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{B^C(k-1)+B^C(k)}{2}\right) \quad \text{if } 1 \leqq k \leqq N. \tag{4}$$

本稿の経済環境では，均衡戦略の単調的性質[20]を得ることができる．

補題 4.2 (B^C, B^M) を，$B^M(N) \neq 0$ を満たす，対称的なベイジアン・ナッシュ均衡とする．もし $B^M(N) \geqq b_*^M$ ならば，
$B^M(1) \geqq \cdots \geqq B^M(N-1) \geqq B^M(N)$ かつ，$B^C(1) \geqq \cdots \geqq B^C(N-1) \geqq B^C(N)$；
また，もし $B^M(N) < b_*^M$ ならば，
$B^M(1) < \cdots < B^M(N-1) < B^M(N)$ かつ，$B^C(1) < \cdots < B^C(N-1) < B^C(N)$.

20) この主張は Shin (1996), p. 51 である．

証明：(B^C, B^M) を対称的なベイジアン・ナッシュ均衡とする．(3)と(4)から，$\{B^M(k)|k=1, 2, \cdots, N\}$ を変数とする2階の非線形の差分方程式

$$B^M(1)\{1-(1-B^M(1))^{\beta-1}\} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{B^M(1)+B^M(2)}{4}\right) \tag{5}$$

$$B^M(k)\{1-(1-B^M(k))^{\beta-1}\}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{B^M(k-1)+2B^M(k)+B^M(k+1)}{4}\right)$$
$$\text{if } 2 \leqq k \leqq N-1\,; \tag{6}$$

$$B^M(N)\{1-(1-B^M(N))^{\beta-1}\} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{B^M(N-1)+3B^M(N)}{4}\right) \tag{7}$$

を得る．まず，第一の主張を証明する．$B^M(N) \geqq b^M_*$ を仮定する．このとき，(1)から $b^M_* = 1-\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{\beta-1}}$ であるから，$B^M(N) \geqq 1-\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{\beta-1}}$ を得る．よって，$B^M(N)\{1-(1-B^M(N))^{\beta-1}\} \geqq \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 B^M(N)$ である．終点条件を使うと，

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{B^M(N-1)+3B^M(N)}{4}\right) \geqq \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 B^M(N)$$

よって，$B^M(N) \leqq B^M(N-1)$ を得る．数学的帰納法を利用するために，$B^M(k) \geqq B^M(k+1) \geqq b^M_*$ を仮定する．(5)から，

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 B^M(k)\{1-(1-B^M(k))^{\beta-1}\} = \frac{1}{4}B^M(k-1)+\frac{1}{2}B^M(k)+\frac{1}{4}B^M(k+1)$$

を得る．このとき，

$$2\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 B^M(k)\{1-(1-B^M(k))^{\beta-1}\} = \frac{1}{2}\{B^M(k-1)+B^M(k+1)\}+B^M(k).$$

この等式は，

$$B^M(k)+2\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 B^M(k)\{1-(1-B^M(k))^{\beta-1}\}=\frac{1}{2}\{B^M(k-1)+B^M(k+1)\}+2B^M(k)$$

と等しい．よって，

$$B^M(k)+\frac{1}{2}\{B^M(k-1)+B^M(k+1)\}+2\left\{B^M(k)-\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 B^M(k)\{1-(1-B^M(k))^{\beta-1}\}\right\}. \tag{8}$$

$B^M(k) \geqq b^M_*$ を仮定したから，$B^M(k) \geqq 1-\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{\beta-1}}$ を得る．よって，

$B^M(k)-\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 B^M(k)\{1-(1-B^M(k))^{\beta-1}\} \leqq 0$. この不等式を(7)に適用して，

$$B^M(k) \leqq \frac{1}{2}\{B^M(k-1)+B^M(k+1)\}.$$

帰納法の仮定から，$B^M(k) \leqq \frac{1}{2}\{B^M(k-1)+B^M(k)\}$. よって，$B^M(k-1) \geqq B^M(k)$. $B^M(1) \geqq \cdots \geqq B^M(N-1) \geqq B^M(N)$ を得た．

(3)から，各 $k=1, \cdots, N-2$ について，

$$B^C(k+1)-B^C(k)=\left(\frac{n-1}{2n}\right)(B^M(k+2)-B^M(k))$$

そして，

$$B^C(N)-B^C(N-1)=\left(\frac{n-1}{2n}\right)(B^M(N)-B^M(N-1))$$

である．よって，$B^C(1) \geqq \cdots \geqq B^C(N-1) \geqq B^C(N)$. これで第一の主張は証明された．

次に第二の主張を証明する．$B^M(N)<b^M_*$ を仮定する．(1)より $b^M_*=1-\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{\beta-1}}$ であるから，$B^M(N)\{1-(1-B^M(N))^{\beta-1}\}<\left(\frac{n-1}{n}\right)B^M(N)$. 終点条件を利用して，

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{B^M(N-1)+3B^M(N)}{4}\right)<\left(\frac{n-1}{n}\right)B^M(N).$$

よって，$B^M(N)>B^M(N-1)$ を得る．数学的帰納法を利用するために，$B^M(k)<B^M(k+1)<b^M_*$ を仮定する．$B^M(k) \geq b^M_*$ と仮定したから，$1-(1-B^M(k))^{\beta-1}<\left(\frac{n-1}{n}\right)$. よって，$B^M(k)-\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 B^M(k)\{1-(1-B^M(k))^{\beta-1}\}>0$. (7)から，

$$B^M(k)>\frac{1}{2}\{B^M(k-1)+B^M(k+1)\}.$$

帰納法の仮定から，$B^M(k)>\frac{1}{2}\{B^M(k-1)+B^M(k)\}$. よって，$B^M(k)>B^M(k-1)$. $B^M(1)<\cdots<B^M(N-1)<B^M(N)$ を得る．

(3)から，各 $k=1, \cdots, N-2$ について，

$$B^C(k+1)-B^C(k)=\left(\frac{n-1}{2n}\right)(B^M(k+2)-B^M(k)),$$

そして，

$$B^C(N)-B^C(N-1)=\left(\frac{n-1}{2n}\right)(B^M(N)-B^M(N-1))$$

よって，$B^C(1)<\cdots<B^C(N-1)<B^C(N)$ を得る．これで第二の主張の証明が終わった． ■

命題 4.1 の証明：まず，主張(1)を証明する．二つの状態 $\omega,\ \omega'\in\Omega$ について，$DK^M_{C*}(\omega)<DK^M_{C*}(\omega')$ を仮定する．補題 3.2 (2)から，$\omega=(q,\ r)$ かつ $\omega'=(q',\ r')$ と書くとき，$r<r'$ である．補題 4.2 の第 2 の主張から，$B^M(r)<B^M(r')$，つまり，$B^M(\omega)<B^M(\omega')$ を得る．次に，ある二つの状態 $\omega,\ \omega'\in\Omega$ が存在して，$DK^C_{C*}(\omega)<DK^C_{C*}(\omega')$ を仮定する．補題 3.2 (1)から，$\omega=(q,\ r)$ かつ $\omega'=(q',\ r')$ と書くとき，$q<q'$ である．よって，補題 4.2 の第 2 の主張から，$B^C(q)<B^C(q')$，つまり，$B^C(\omega)<B^C(\omega')$ を得る．

主張(2)を証明する．二つの状態 $\omega,\ \omega'\in\Omega$ について，$DK^M_{C*}(\omega)<DK^M_{C*}(\omega')$ を仮定する．補題 3.2 (2)から，$\omega=(q,\ r)$ かつ $\omega'=(q',\ r')$ と書くとき，$r<r'$ である．補題 4.2 の第 1 の主張から，$B^M(r)\geqq B^M(r')$，つまり，$B^M(\omega)\geqq B^M(\omega')$ を得る．次に，ある二つの状態 $\omega,\ \omega'\in\Omega$ において，$DK^C_{C*}(\omega)<DK^C_{C*}(\omega')$ を仮定する．このとき，補題 3.2 (1)から，$\omega=(q,\ r)$ かつ $\omega'=(q',\ r')$ と書くとき，$q<q'$ である．よって，補題 4.2 の第 1 の主張から，$B^C(q)\geqq B^C(q')$，つまり，$B^C(\omega)\geqq B^C(\omega')$ を得る． ■

5　おわりに

2 財･2 タイプの消費者からなる純粋交換経済という本稿の設定では，条件付きではあるが，命題 4.1 の逆が成立する．これは，補題 4.1 の逆の主張，すなわち自分の地域の降水日数が多ければそれに応じて相手の地域の降水量も多いから，より深い段階まで相手の初期保有が 1 であることを知ることができるという主張が成り立つからである．ただし，この主張はタイプ M については，

$K^M(G^*)$ 上でのみ成立する．

補題 5.1　任意の２つの状態 $\omega=(q,\ r),\ \omega'=(q',\ r')\in\Omega$ について，

$$q<q' \Longrightarrow DK^C_{G^*}(\omega)<DK^C_{G^*}(\omega').$$

また，任意の２つの状態 $\omega=(q,\ r),\ \omega'=(q',\ r')\in K^M(G^*)$ について，

$$r<r' \Longrightarrow DK^M_{G^*}(\omega)<DK^M_{G^*}(\omega').$$

この補題は，命題3.1から証明できる．この補題から，命題4.1の逆に相当する次の命題が成立する．

命題 5.1　$(B^C,\ B^M)$ を対称的なベイジアン・ナッシュ均衡とし，各 $k=1,\ \cdots,\ N$ について $B^C(k)>0$ かつ $B^M(k)>0$ が満たされるものとする．
(1)$B^M(N)<b^M_*$ を仮定する．このとき，各タイプ $t=C,\ M$ と任意の２つの状態 $\omega,\ \omega'\in K^t(G^*)$ について，

$$B^t(\omega)<B^t(\omega') \Longrightarrow DK^t_{G^*}(\omega)<DK^t_{G^*}(\omega').$$

(2)$B^M(N)\geqq b^M_*$ を仮定する．このとき，各タイプ $t=C,\ M$ と任意の２つの状態 $\omega,\ \omega'\in K^t(G^*)$ について，

$$B^t(\omega)\geqq B^t(\omega') \Longrightarrow DK^t_{G^*}(\omega)<DK^t_{G^*}(\omega').$$

この逆の命題は，命題4.1のようにすべての状態の上で成立するわけではなく，各取引者が G^* を知り得る状態の上のみで成立する．この条件は本稿で考えた情報構造に起因している．

本稿の結果は効用関数・初期保有といった経済データと経済の情報構造の特定化に大きく依存し，かつそれらが密接に連関している．本稿で取り扱った純粋交換経済は，２財・２タイプの消費者という財交換のモデルとしては，もっとも基本的なものである．交換のモデルとしてより興味深い３財・３タイプの消費者からなる純粋交換経済において，情報に関する不確実性と市場均衡の連関の可能性を分析することは，今後の課題とする．また，本稿では財交換のモデルであったが，不確実性の存在を前提とするリスク交換のモデルにおいて，情報に関する不確実性と市場均衡の連関の可能性を分析することも，今後の課題とする．

A 補　　論

この補論では第3節におけるいくつかの主張に証明を与える．まず，補題3.1(2)の証明をする．

主張A.1 $K^M(G^*)=\{(q,\ r)\in\Omega|q\geqq1,\ r\geqq2\}$.

証明：定義より $K^M(G^*)=\{(q,\ r)\in\Omega|\boldsymbol{I}^M(q,\ r)\subset G^*\}$ である．まず，$K^M(G^*)\subset\{(q,\ r)\in\Omega|q\geqq1,\ r\geqq2\}$ を示す．$(q,\ r)\in K^M(G^*)$ とすれば，$\boldsymbol{I}^M(q,\ r)\subset G^*$. このとき $\boldsymbol{I}^M(q,\ r)=\{(r,\ r),\ (r-1,\ r)\}$ であるから，$q\geqq1$ かつ $r\geqq2$ を得る．よって，$(q,\ r)\in G^*$.

次に，逆の包含関係を示す，$q\geqq1$ かつ $r\geqq2$ なる $(q,\ r)\in\Omega$ について，$\boldsymbol{I}^M(q,\ r)\subset G^*$ を示せばよい．$\boldsymbol{I}^M(q,\ r)=\{(r,\ r),\ (r-1,\ r)\}$，そして $r\geqq2$ であるから，任意の $(q',\ r')\in\boldsymbol{I}^M(q,\ r)$ について，$q'\geqq1$ かつ $r'\geqq1$ である．よって，$(q',\ r')\in G^*$. ■

主張A.2 $K^CK^M(G^*)=\{(q,\ r)\in\Omega|q\geqq2,\ r\geqq2\}$.

証明：まず，$K^CK^M(G^*)\subset\{(q,\ r)\in\Omega|q\geqq2,\ r\geqq2\}$ を示す，$(q,\ r)\in K^CK^M(G^*)$ とすれば，$\boldsymbol{I}^C(q,\ r)\subset K^M(G^*)$ である．主張A.1と $\boldsymbol{I}^C(q,\ r)=\{(q,\ q),\ (q,\ q+1)\}$ より，$q\geqq2$ かつ $r\geqq2$ を得る．

次に，逆の包含関係を示す．$q\geqq2$ かつ $r\geqq2$ なる $(q,\ r)\in\Omega$ について，$\boldsymbol{I}^C(q,\ r)\subset K^M(G^*)$ を示せばよい．$\boldsymbol{I}^C(q,\ r)=\{(q,\ q),\ (q,\ q+1)\}$，そして $q\geqq2$ であるから，任意の $(q',\ r')\in\boldsymbol{I}^C(q,\ r)$ について，$q'\geqq2$ かつ $r'\geqq2$ である．よって，$(q',\ r)\in K^M(G^*)$. ■

以上二つの主張を使って，補題3.1(2)の証明をする

補題3.1(2)の証明：数学的帰納法により証明する．主張A.2から，補題の主張は $k=1$ のとき成立する．そこで $(K^CK^M)^k(G^*)=\{(q,\ r)\in\Omega|q\geqq k+1,\ r\geqq k+1\}$ を仮定して，$k+1$ の場合も主張が成立することを示す．まず，次の主張を示す：

主張A.3 $K^M(K^CK^M)^k(G^*)=\{(q,\ r)\in\Omega|q\geqq k+1,\ r\geqq k+2\}.$

主張A.3の証明：まず，$K^M(K^CK^M)^k(G^*)\subset\{(q,\ r)\in\Omega|q\geqq k+1,\ r\geqq k+2\}$ を示す．$(q,\ r)\in K^M(K^CK^M)^k(G^*)$ とすれば，$\boldsymbol{I}^M(q,\ r)\subset(K^CK^M)(G^*)$ である．$\boldsymbol{I}^M(q,\ r)=\{(r,\ r),\ (r-1,\ r)\}$，そして帰納法の仮定より，$q\geqq k+1$ かつ $r\geqq k+2$ を得る．

次に，逆の包含関係を示す．$q\geqq k+1$，$r\geqq k+2$ なる $(q,\ r)\in\Omega$ について，$\boldsymbol{I}^M(q,\ r)\subset(K^CK^M)^k(G^*)$ を示せばよい．$\boldsymbol{I}^M(q,\ r)=\{(r,\ r),\ (r-1,\ r)\}$，そして $r\geqq k+2$ であるから，任意の $(q',\ r')\in\boldsymbol{I}^M(q,\ r)$ について，$q'\geqq k+1$ かつ $r'\geqq k+1$ である．よって，$(q',\ r')\in(K^CK^M)^k(G^*)$. これで主張A.3は証明された．

補題の証明に戻る．まず，$(K^CK^M)^{k+1}(G^*)\subset\{(q,\ r)\in\Omega|q\geqq k+2,\ \geqq k+2\}$ を示す．$(q,\ r)\in(K^CK^M)^{k+1}(G^*)$ とすれば，$\boldsymbol{I}^C(q,\ r)\subset K^M(K^CK^M)^k(G^*)$ である．$\boldsymbol{I}^C(q,\ r)=\{(q,\ q),\ (q,\ q+1)\}$，そして主張A.3より，$q\geqq k+2$ かつ $r\geqq k+2$ を得る．

次に，逆の包含関係を示す．$q\geqq k+2$ かつ $r\geqq k+2$ なる $(q,\ r)\in\Omega$ について，$\boldsymbol{I}^C(q,\ r)\subset K^M(K^CK^M)^k(G^*)$ を示せばよい．$\boldsymbol{I}^C(q,\ r)=\{(q,\ q),\ (q,\ q+1)\}$，そして $q\geqq k+2$ であるから，任意の $(q',\ r')\in\boldsymbol{I}^C(q,\ r)$ について，$q'\geqq k+1$ かつ $r'\geqq k+2$ である．よって，$(q',\ r')\in K^M(K^CK^M)^k(G^*)$. したがって，数学的帰納的により補題3.1(2)の主張が証明された． ■

系3.1の証明：ある $\omega\in\Omega$ について $\omega\in\bigcap_{k=0}^{\infty}(K^CK^M)^k(G^*)$ を仮定する．補題3.1(2)から，このことは任意 $k\geqq 1$ について $\omega\geqq(k+1,\ k+1)$ であることを意味する．これは $\omega\in\Omega$ に矛盾する．よって，$\bigcap_{k=0}^{\infty}(K^CK^M)^k(G^*)=\emptyset$ である．$CK(G^*)\subset\bigcap_{k=0}^{\infty}(K^CK^M)^k(G^*)$ であるから，$CK(G^*)=\emptyset$ である．つまり，事象 G^* が共有知識である状態はない． ■

最後に，補題3.2の証明をする．

補題 3.2 の証明：まず，主張(1)を示す．$DK^M_{G^*}(\omega)=k$, $DK^M_{G^*}(\omega')=k'$ とおく．定義から，

$$\omega\in(K^MK^C)^k(G^*) \text{ かつ } \omega\notin(K^MK^C)^{k+1}(G^*),$$

そして，

$$\omega'\in(K^MK^C)^{k'}(G^*) \text{ かつ } \omega'\notin(K^MK^C)^{k'+1}(G^*)$$

である．補題 3.1 (1)から，

$$(q,\ r)=(k,\ k+1) \text{ または } (k+1,\ k+1),$$

そして，

$$(q',\ r')=(k',\ k'+1) \text{ または } (k'+1,\ k'+1)$$

である．よって，$k<k'$ ならば $r<r'$ である．

次に主張(2)を示す．$DK^C_{G^*}(\omega)=k$, $DK^C_{G^*}(\omega')=k'$ とおく．定義から，

$$\omega\in(K^CK^M)^k(G^*) \text{ かつ } \omega\notin(K^CK^M)^{k+1}(G^*),$$

そして，

$$\omega'\in(K^CK^M)^{k'}(G^*) \text{ かつ } \omega'\notin(K^CK^M)^{k'+1}(G^*)$$

である．補題 3.1 (2)から，

$$(q,\ r)=(k+1,\ k+1) \text{ または } (k+1,\ k+2),$$

そして，

$$(q',\ r')=(k',\ k'+1) \text{ または } (k'+1,\ k'+2)$$

である．よって，$k<k'$ ならば $q<q'$ である． ■

参考文献

[1] 岡田章 (1996)『ゲーム理論』東京：有斐閣.

[2] 山崎昭 (1995)「情報社会と市場の経済モデル」『経済学研究』一橋大学研究年報 36, 103-155.

[3] Allen, F. and S. Morris (1998), "Finance Appliation of Game Theory," Cowles Foundation Discussion Papers, No. 1195. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University.

[4] Allen, F., S. Morris and A. Postlewaite (1993), "Finite Bubbles with

Short Sales Constraints and Asymmetric Information," *Journal of Economic Theory,* Vol. 61, 206-229.

[5]Arrow, K. J. (1953), "Le Rôle des Valueurs Boursières Pour la Repartition la Meillure des Risques," *Econometrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, No. 40, 41-47 ; discussion, 47-48 ; Translated as : Arrow, K. J., "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing," *Review of Economic Studies*, Vol. 31, 91-96, (1964).

[6]Brunnermeier, M. K. (2001), *Asset Pricing under Asymmetric Information : Bubbles, Crashes, Technical Analysis, and Herding.* Oxford : Oxford University Press.

[7]Dubey, P., J. Geanakoplos and M. Shubik (1987), "The Revelation of Information in Strategic Market Games-A Critique of Rational Expectations Equilibrium-," *Journal of Mathematical Economics,* Vol. 16, 105-137.

[8]Minelli, E. (1995), *Rational Expectations in Games.* Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences Économiques, Sociales et Politiques Nouvelle, Série-No. 256.

[9]Morris, S., A. Postlewaite, and H. S. Shin (1995), "Depth of Knowledge and the Effect of Higher Order Uncertainty," *Economic Theory,* Vol. 6, 453-467.

[10]Morris, S., R. Rob and H. S. Shin (1995), "p-Dominance and Belief Potential," *Econometrica,* Vol. 63, 145-157.

[11]Peck. J. and K. Shell (1989), "On the Nonequivaence of the Arrow-Securities Game and the Contingent-Commodities Game," in Barnett, J., J. Geweke and K. Shell eds., *Economic Complexity : Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity,* pp.61-85. London : Cambridge University Press.

[12]Peck, J. and K. Shell (1991), "Market Uncertainty : Correlated and

Sunspot Equilibria in Imperfectly Competitive Economies," *Review of Economic Studies,* Vol. 58, 1011-1029.

[13] Radner, R. (1979), "Rational Expectations Equilibrium: Generic Existence and the Information Revealed by Prices," *Econometrica,* Vol. 47, 655-678.

[14] Rahi, R. (1995), "Partially Revealing Rational Expectations Equilibria with Nominal Assets," *Journal of Mathematical Economics,* Vol. 24, 137-146.

[15] Rubinstein, A. (1989), "The Electronic Mail Game: Strategic Behavior Under 'Almost Common Knowledge'," *American Economic Review,* Vol. 79, 385-391.

[16] Shapely, L. and M. Shubik (1977), "Trade Using One Commodity as a Means of Payment," *Journal of Political Economy,* Vol. 85, 937-968.

[17] Shin, H. S. (1996), "Comparing the Robustness of Trading Systems to Higher-Order Uncertainty," *Review of Economic Studies,* Vol. 63, 39-59.

[18] Shin, H. S. and T. Williamson (1996), "How Much Common Belief is Necessary for a Convention," *Games and Economic Behavior,* Vol. 13, 252-268.

[19] Weyers, S. (1999), "Uncertainty and Insurance in Strategic Market Games," *Economic Theory,* Vol. 14, 181-201.