

## ベイズの定理と統計学

木 村 等

ベイズの定理を最も単純な場合について述べれば、つぎのとおりである。2つの原因 $A_1$ ,  $A_2$ から起る結果の1つを $B$ とする。いま $A_1$ から $B$ が起る確率を $P(B|A_1)$ ,  $A_2$ から $B$ が起る確率を $P(B|A_2)$ とし,  $A_1$ ,  $A_2$ の起る確率をそれぞれ $P(A_1)$ ,  $P(A_2)$ とするならば, 結果 $B$ が観測されたとき, その原因が $A_1$ である確率は

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)}$$

となる。

このベイズの定理は, ベイズの死後1763年に発表されて以来問題とされて来た。観測から原因へという帰納の問題をとりあつかうという意味において, 理論統計学の基本問題についての命題でありながら, フィッシャー等による近代統計学は, このベイズの定理を排除して来たのである。一方最近においては, このベイズの定理を積極的に利用しようという所謂ベイズの立場の統計学が発達してきた。ベイズの定理を否定する立場と, 容認する立場をわけたのは先験的確率とよばれる $P(A_1)$ ,  $P(A_2)$ についての考え方にあったように思われる。ここではこれらの立場と確率についての考え方の関連を考えてみたい。

確率をどのように考えるかにはいくつかの異なった考え方がある。古典的な確率論は, 確率の定義を「同様にたしからしい」という考え方に基礎をおいている。例えば, サイコロをふったとき, 1の目がでる確率が $\frac{1}{6}$ であるということ, つぎのように定義する。すなわち, サイコロをふったとき, 1の目がでることも, 2の目がでることも, …… , 6の目がでることも, いずれも同様にたしからしい。いま問題にしている1の目がでるということは, この同様にたしからしい6つの場合のうちの1つの場合であるから, 確率は $\frac{1}{6}$ である, という

のである。このように確率の古典的定義においては、同様に確からしいという考え方が前提されている。したがって、この同様に確からしいということをどのように規定するかが問題となる。同様に確からしいとは実質内容としては確率が等しいということである。しかしながら、確率が等しいという規定の仕方では、これに基づいて確率を定義するという立場にとっては、循環論を生ずることになる。ラプラスその他は、どの目が特に起りやすいとか、起りにくいとかということについて知識をもっていないとき、あるいは、おのおのの目が相異なる確からしさをもつということを主張すべき何の根拠をもっていない、あるいは知らないとき、同様に確からしいのであると規定している。ベイズの定理における先験的確率すなわち、おのおのの原因の起る確率については、全く知識がないのが通常である。したがって、この立場からは、先験的確率はすべて等しいとされることとなる。

例えば、 $n$ 回の試行において、ある事象  $A$  が  $r$  回起ったとき、事象  $A$  の起る確率の推定の問題を考えてみる。その生起確率が  $x$  である事象が  $n$  回の試行において  $r$  回起る確率を  $P_n(r|x)$  とかく。いま、事象  $A$  の生起確率が  $x$  である先験的確率を  $P_0(x)$  とすれば、事後確率すなわち、 $n$  回のうち  $r$  回起ったということが観測されたという条件のもとで、この事象の生起確率が  $x$  である確率  $Q_n(x)$  は、 $x$  が離散的な場合、ベイズの定理によって、

$$Q_n(x) = \frac{P_0(x)P_n(r|x)}{\sum P_0(x)P_n(r|x)}$$

となる。ここで、分母の  $\Sigma$  は  $x$  の起りうる全ての場合の和である。一般には  $x$  は  $0 < x < 1$  の全ての実数と考えられるから、対応する形として、

$$Q_n(x) = \frac{P_0(x)P_n(r|x)}{\int_0^1 P_0(x)P_n(r|x)dx}$$

をうる。

ここで、

$$P_n(r|x) = x^r(1-x)^{n-r}$$

がなりたつ。一方生起確率  $x$  について、全く知識がない場合は、 $0 < x < 1$  のどの  $x$  も同様に確からしいといわなければならない。したがって、先験確率分布は一様分布となることから、

$$Q_n(x) = \frac{x^r(1-x)^{n-r}}{\int_0^1 x^r(1-x)^r dx}$$

がなりたつ。つぎに、これにつづく試行において、この事象が起る確率の期待値は、

$$\begin{aligned} \int_0^1 x Q_n(x) dx &= \frac{\int_0^1 x^{r+1}(1-x)^{n-r} dx}{\int_0^1 x^r(1-x)^{n-r} dx} \\ &= \frac{B(r+2, n-r+1)}{B(r+1, n-r+1)} \\ &= \frac{\Gamma(r+2)\Gamma(n-r+1)\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+3)\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)} \\ &= \frac{(r+1)!(n+1)!}{(n+2)! r!} \\ &= \frac{r+1}{n+2} \end{aligned}$$

となる。これが継起の公式である。

上に述べたように、ラプラスの立場によるベイズの定理のあつかいは、未知である先験確率について、未知すなわち等確率と考えることに基礎をおいている。その後、確率の考え方においても、「同様にたしからしい」ということを未知の上に基礎をおくのではなく、同様に確からしいと判断するためには、充分な根拠がなければならないとする主張があらわれた。統計学においても、フィッシャーは未知すなわち等確率という考え方を批判し、ベイズの定理を用いない方向で統計学をつくりあげた。前にあげた例の場合についてフィッシャーの考え方を述べればつぎのとおりである。すなわち、生起確率が  $x$  である事象が

$n$  回のうち  $r$  回起る確率は、

$$L(x) = \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}$$

となる。これは  $x$  の関数と考えられ、フィッシャーは尤度とよんでいる。この尤度を最も大きくする  $x$  をもって、事象  $A$  の生起確率の推定値とするのが、フィッシャーの最大尤度法である。すなわち、

$$\frac{dL}{dx} = 0$$

をといて、 $x$  の推定値として、

$$\hat{x} = \frac{r}{n}$$

をうる。

これに対して、ネイマン、ピアソン等は頻度論的確率論に基礎をおいて統計学を考えている。頻度論的立場では、サイコロをふったとき 1 の目が出る確率が  $\frac{1}{6}$  であるということは、事実過去において、何回もの長いくりかえしにおいて 1 の目が出た回数、くりかえしの総数の  $\frac{1}{6}$  に近いものであったという経験があったということに基礎をおいている。この立場にたつ、フォン・ミーゼスの考え方について述べれば、つぎのとおりである。事象に対応する標識  $\{A, B, C, \dots\}$  の系列

$$m_1, m_2, m_3, \dots$$

において、

- 1) この系列のはじめの  $n$  項にふくまれる標識  $A$  の個数を  $n(A)$  とすれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A)$$

が存在する。

つぎに、無規則性を規定するために、項位選択を定義する。すなわち、1 つの系列から無限部分系列をつくるのに、第  $i$  項を部分系列にふくめるかどうかを、高々第  $i-1$  項までの標識についての知識に基づいて決定する方法を項位

選択という。たとえば、すべての奇数項をえらぶという方法は、標識についての知識を全くもちいていないから、1つの項位選択である。また、標識  $A$  のあらわれたあとの項によって部分系列をつくるというものも1つの項位選択である。このような項位選択によって、つぎのような条件をおく。

2) 任意の項位選択によってえられる部分系列

$$m_{i(1)}, m_{i(2)}, m_{i(3)}, \dots$$

について、1)と同じことがなりたつ。すなわち、第  $n'$  項までの  $A$  の個数を  $n'(A)$  とすれば、

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'(A)}{n'} = P(A)$$

がなりたつ。

この第2の条件を無規則性の条件という。上の2つの条件をもつ標識の系列をコレクティブといい、 $P(A)$  を  $A$  の起る確率という。このように、系列を基礎において確率を考えるのであるから、くりかえしの可能なものについてでなければ確率は考えられない。すなわち、この立場からは、火星に生物のいる確率という言葉は意味をもたない。

このような確率に基礎をおいた推定法が区間推定である。区間推定によって、例にあげた確率の推定の問題を記述すればつぎのようになる。すなわち、現実を得られた  $n$  回の試行のうち事象  $A$  は  $r$  回起ったという結果から、下および上の信頼限界を  $t_1 = \frac{r}{n} - \varepsilon_1$ ,  $t_2 = \frac{r}{n} + \varepsilon_2$  としてもとめ、 $A$  の生起確率  $x$  とこれらの値の間には、

$$P(t_1 \leq x \leq t_2) = \alpha$$

という関係がなりたつとする。これを言葉で表現すれば、「 $x$  が  $t_1$  と  $t_2$  の間にある確率は  $\alpha$  である」ということになる。ところが、 $t_1$ ,  $t_2$  は特定の値であり、 $x$  もまた我々は知らないけれども一定の値をもつものであるから、 $t_1 \leq x \leq t_2$  という命題は真であるか偽であるか、いずれかであって、確率とは関係のないものである。しかるに、この命題の成立する確率が  $\alpha$  であるという表現をとっているのは、 $n$  回の試行なるものを1回実行した段階ではたしかに、

「 $x$  は  $t_1$  と  $t_2$  の間にある」という命題は真か偽かのいずれかであるが、 $n$  回の試行なるものを何度もくりかえして、その都度信頼限界を計算して、「 $x$  は  $t_1$  と  $t_2$  の間にある」という判断をくりかえすならば、あるときはこの命題が真であって、正しい判断をしており、あるときはこの命題が偽であって、あやまった判断をしていることになる。このような系列において、正しい判断をする確率というものは頻度論的確率となる。そして、この正しい判断をする頻度論的確率が  $\alpha$  であるということを上述の関係式が示しているのである。実際には、 $n$  回の試行というものは、1回かぎりであり、その結果から  $x$  が推定区間の中にあるという判断は、正しいかあやまっているかのいずれかに定まっているものではあるが、 $n$  回の試行というものを単位としたくりかえしというものを背後において、そのくりかえしの中で同じような信頼限界の計算をするかぎり、正しい判断をする確率として信頼度  $\alpha$  があるわけである。

これに対して  $n$  回の試行を単位とした実験を実際にくりかえすことができるような場合については、ベイズの定理を利用した推定が可能であるというのがフォン・ミーゼスの考えである。いま、 $n$  回の試行を  $m$  回くりかえしたとし、事象  $A$  がおのおのの  $n$  回のうち  $r_i$  回起ったとする。すなわち、

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$$

という系列が観測されたとする。このとき、最初の実験では、事象  $A$  の生起確率は  $x_1$  であり、事象  $A$  の実現回数が  $r_1$  回である。第 2 の実験では、事象  $A$  の生起確率は  $x_2$  であり、事象  $A$  の実現回数が  $r_2$  回である。…… というように考えられる場合が実際の問題としてありうる。ただし各  $x_i$  は我々にとっては知りえないものである。このような問題のとりあつかいについてベイズの定理を利用しようというのである。もう一度  $r_i$  とその背後にある事象  $A$  の生起確率  $x_i$  とをならべて系列をつくれば、

$$(r_1, x_1), (r_2, x_2), \dots, (r_m, x_m)$$

となる。この系列について、理想的な場合として無限系列を考えることができる。そこにおいて、 $m$  回中  $x_i$  が特定の  $x$  という数値をとる回数を  $m(x)$  とすれば、

$$\lim \frac{m(x)}{m} = P(x)$$

は、各実験についての事象  $A$  の生起確率が  $x$  である先験的確率である。またこの系列において、 $r_i$  が特定の  $r$  という数値をとる場合の数  $m(r)$  を考えれば、その場合  $x_i$  はいろいろな値をとりうるから、

$$m(r) = \sum_x m(r, x)$$

となる。ここで、

$$\frac{m(r)}{m} = \sum_x \frac{m(r, x)}{m(x)} \cdot \frac{m(x)}{m}$$

がなりたち、極限として、

$$Q_r = \sum_x P(r | x) \cdot P(x)$$

がなりたつであろう。ここで、 $P(r | x) = \lim \frac{m(r, x)}{m(x)}$  は、事象  $A$  の生起確率が  $x$  であるとき、事象  $A$  の実現回数が  $r$  である場合の数の比の極限值であり、頻度論的な意味での、生起確率が  $x$  である条件のもとで  $r$  の起る確率であるから、

$$P(r | x) = \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}$$

となる。また、

$$P(x) = \lim \frac{m(x)}{m}$$

は前述の事象  $A$  の生起確率が  $x$  であることの前験的確率であり、当然頻度論の意味での確率である。 $x$  はこれまでは説明の都合上離散的なものとしてとりあつかって来たが、 $0 < x < 1$  の連続的な量と考えられるのが一般である。そのためには、

$$Q_r = \int P(r | x) dP(x)$$

とすればよいことは容易にわかる。ここで、つぎのような量をもとめてみる。

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=0}^n r Q_r &= \int \sum r P(r | x) dP(x) \\
 &= \int \sum r \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} dP(x) \\
 &= \int n x dP(x) = n \mu_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=0}^n r(r-1) Q_r &= \int \sum r(r-1) \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} dP(x) \\
 &= \int n(n-1) x^2 dP(x) \\
 &= n(n-1) \int x^2 dP(x) \\
 &= n(n-1) \mu_2
 \end{aligned}$$

ここで、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ は先験的確率  $x$  の1次および2次のモーメントである。ここで  $\sum r Q_r$ 、 $\sum r(r-1) Q_r$  について考えれば、 $Q_r$  の近似値として、我々は  $m(r)/m$  をもっている。これを持ちいて、 $\sum r Q_r$ 、 $\sum r(r-1) Q_r$  の近似値すなわち、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$  の近似値がえられることとなる。すなわち、経験の集積から、先験的確率  $x$  の分布についての情報がえられることとなり、これから、 $P(x)$  の近似をおこない、ベイズの定理

$$P(x \in E | r) = \frac{\int_E P(r | x) dP(x)}{\int P(r | x) dP(x)}$$

を持ちいて、観測値が  $r$  であったとき、事象  $A$  の生起確率が一定の範囲  $E$  に入る確率を評価することができる。

このように、経験をもとにして、先験的確率  $P(x)$  に関する情報をえて、ベイズの定理を利用しようとする考え方は、頻度論的確率に基礎をおいたものである。これに対して、経験を陽表的にとりあつかうことなく、個人のものとして、直観という形で先験的確率をとらえようとするのが、今日の所謂ベイズの立場であろう。ここでは確率は1つの命題の成立に関する個人の直観的な評価と考えられている。この考えの先駆をなすケインズの考え方は、個人的



なものではなく、むしろ命題の間の論理的な関係である。命題は本来真であるか偽であるかいずれかであるけれども、我々のもっている知識との関連において、確かであるとか、確からしいとかいわれるのである。このような関係、すなわち、我々の現在もっている知識から判断して、1つの命題がどの程度信じるかという程度を確率と考えるのがケインズの考え方である。ケインズ自身は、この関連は主観的なものではなく、客観的かつ論理的であると考えている。これに対して、これを個人的・主観的なものと考えてのが、クープマン、サベジ等の考え方である。このうちサベジの考え方を述べればつぎのようなものである。

賭において人間がとる行動等不確実性のもとにおける人間の行動の考察から出発する。そのために、行動する人間がかかわりをもつ対象を世界とよび、その状態、状態の集合としての事象について考える。例えば、卵がくさっているかないかについて賭けるとき、この卵が世界であり、くさっていること、あるいはくさっていないことが、状態であり、また1つの状態からなる事象である。このとき、くさっている方に賭けるとするのが1つの行動である。このような行動をとったとき、実際にくさっていれば、賞金を獲得し、くさっていなければ賞金はえられない。この賞金等を結果という。したがって、行動は、世界の状態  $s$  に対して1つの結果  $f(s)$  を対応させる関数と考えることができる。この行動について、どちらが好ましいかという順序が常につけられるものとする。事実人間は、常に何らかの選択をせまられているのである。

つぎに、全ての状態に対して同一の結果を対応させるような行動を考えれば、このような2つの行動の間の選好関係から、結果についての選好関係をみちびくことができる。さらに、事象  $A$  にふくまれるすべての状態に対しては結果  $f$  を、 $A$  にふくまれない状態に対しては結果  $f'$  を対応させるような行動を考え  $f(A)$  とかく。ここで、 $f$  は  $f'$  より選好される。すなわち、 $f > f'$  とする。いま、事象  $B$  に対しても、同じ  $f$ 、 $f'$  によって同様に定義される行動  $f(B)$  を考えたとき、 $f(B)$  が  $f(A)$  より選好される。すなわち、 $f(A) \leq f(B)$  であるとする。これは、事象  $B$  の方が事象  $A$  より、より確かであると人間が判断す

るということの意味するものであろう。したがって、このような関係があるとき、 $B$  は  $A$  より確かであるといい、 $A \leq B$  とかく。このようにして、世界の状態の集合としての事象の間に、より確からしいという関係を導入することができた。これを質的確率という。

さらに、いま考えている世界のすべての状態からなる事象すなわち、全事象を、ほとんど同じ程度確からしい  $n$  個の事象の和として分割する。これを  $n$  分割とよぶ。ここで、任意の自然数  $n$  に対して、 $n$  分割が可能であることをみとめる。いま事象  $A$  に対して、 $n$  分割の  $k$  個の事象の和をとり、 $\bigcup_{i=1}^k B_i \leq A$  となる最大の  $k$  を  $k(B, n)$  とする。 $k(B, n)/n$  は極限をもつことが知られるから、これを  $A$  の量的確率とよぶ。このようにして、事象に対して、個人の確からしき、あるいは、確信の程度としての数量がえられることとなる。これは事象  $A$  に直接あるいは間接に関連をもつ事らについての経験が、1人の人間を通してあらわれた数量と考えてよいのではあるまいか。

上に得られた個人的、主観的確率によって、先験的確率を評価してベイズの定理に利用するのが、前にも述べたように今日のベイジアンのお考え方である。すなわち、 $n$  回のうち、事象  $A$  が  $r$  回起きたとき、この  $A$  の生起確率  $x$  を、 $x$  が離散的かつ有限であるとすれば、

$$\begin{aligned} P(x | r) &= \frac{P(r | x)P(x)}{\sum_x P(r | x)P(x)} \\ &= \frac{\binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} P(x)}{\sum_x \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} P(x)} \end{aligned}$$

として推定する。ここで、 $P(x)$  は主観確率である。主観確率をどのように測定するかには問題はあろうが、このような立場から、ベイズの定理はみなおされ、利用されているのである。