関孝和の点竄術と天元術について

林　　　伸　　樹

1　はじめに

中国で宋時代に創められた天元術が我が国に伝ってきたのは，元の朱世傑が著した算学啓蒙（1299）によってであると言われている。[註1]天元術は問題を解くとき，未知数を立てて1元の代数方程式をつくり，算木と算盤を用いて解くのであるが，その際未知数に当たるものを「天元ノ一」とよぶところにその名が由来していると思われる。天元ノ一とは，関孝和の解隠題之法に「天元者，立天元一也」として右の図があるとおり，太極の下に一を立てることを言う。この太極とは周易繫辞上伝にある「是故易有太極，是生両儀，両儀生四象，四象生八卦」の陰陽未生以前の根源としての太極[註2]である。即ち未知数をこの根源としての太極に見立てたのである。

この天元術では，未知数は1個に限られる。しかし，問題によっては補助の未知数をとって多元連立方程式をまずつくり，この連立方程式から補助の未知数を消去して1元の方程式を導き，その後，天元術でこの方程式を解くのが便利なことがある。未知数の数が2個以上になると，算木を用いた天元術では表わすことができない。そこで関孝和（寛永19年，1642ごろ—宝永5年，1708）[註3]は未知数を表わすのに文字を用い，算木によらないで筆算で必要な計算をする方法を創めた。これが点竄術[註4]である。

点竄術は筆算であるので，天元術と異なり文字方程式を扱うことができる。また，点竄術では未知数がすべて天元ノ一になる訳でない。価を求めるために天元ノ一にえらぶと限った訳でもない。現在，xについて整屯する，或はyについての方程式をつくる，ということがあるが，その場合のxやyに当たるものが天元ノ一になるのである。これは下の例で明らかになる。

この小論では，孝和の点竄術及び彼が改良した天元術による方程式の解法を，現在の代数記号を用いないで，なるべく当時の表現形式のままで検討する

ことによって，和算と現在の数学の立ち場や考え方の相違をみることにしたい。

順序として，和算での数と式の表わし方を最初に示しておく。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
10	20	30	40	50	60	70	80	90
𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

この第1段の数字は更に百，万，百万，……の位の数字を表わすために，第2段の数字は千，十万，千万，……の位の数字を表わすために用いられる。従って，たとえば8,032,059は 𝍧○𝍢𝍪○𝍭𝍨 で表わす。ここに○は空位を表わす記号である。小数点はないので，その都度判断しなければならない。負数を表わすには＼をつける。たとえば－32 は 𝍫𝍡̸ で表わす。以上は筆記する際の例であるが，天元術で算盤を使用する際には，正数，負数は算木をそれぞれ赤と黒で区別した。

点竄術での式については，甲＋乙，甲－乙，甲×乙，32甲×乙，甲²，甲³，$\sqrt{甲}$，$\sqrt[3]{甲}$はそれぞれ

|甲 |乙　　|甲 ⫲乙　　|甲乙　　𝍫𝍡甲乙　　|甲 巾　　|甲 再巾　　|甲 商　　|甲 開立商

或は　　　　或は

|甲　　　　|甲

|乙　　　　⫲乙

で表わす。等号に相当する記号はなく，甲＝乙を表わすには，「甲ト乙ハ相消ス」或ハ「相消シテ式ヲ得」と表現する。方程式，たとえば 甲＋2乙x＋丙x^2＝0或は甲－2乙x＋丙x^3＝0は，定数項，1次の項，2次の項，……の係数（これをそれぞれ，実，方，廉，……という）を上から書き

|甲　　　　|甲

||乙　或は　⫲乙　　で表わす。従って　　|甲

|丙　　　　○　　　　　　　　　　　　　|乙

　　　　　　|丙　　　　　　　　　　　　|丙

は，甲＋乙＋丙を表わすときと，甲＋乙x＋丙x^2＝0を表わすときがあり，更に甲＋乙丙＋丙x^2を表わすこともある。そのちがいは前後から判断される。

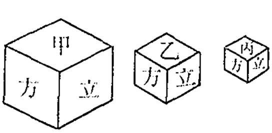
2　点竄術について，発微算法から

まず具体的に延宝2年（1674）に孝和が出版した「発微算法」の例をみることにする。これは天元術に精通したといわれる沢口一之の古今算法記（寛文11年，1671）の遺題15問に，孝和が「其ノ微意ヲ発シ，術式ヲ註シ」[註5]たものである。

第1問は3元の連立方程式をつくり，これから2個の未知数を消去して6次方程式を導いている。第2問は2元の連立方程式から同じく9次方程式を，第3問は4元の連立方程式から27次方程式を導いている。以下同類であるが，第1，第2，第5問については全集[註6]或は平山諦氏著関孝和[註7]に解説があるので，ここでは108次方程式を導いている第4問を検討することにする。

和算書の雰囲気を知るために，暫く原文[註8]の漢文を書き下すことにする。なお（　）の中にその直前の原文の用語等を現代のに改めたり或は説明を加えたりする。

四　今甲乙丙立方（立方体）各一有リ。只云ウ，甲積（甲の体積）ト乙積ト相併セテ共ニ寸ノ立積十三万七千三百四十坪，又乙積ト丙積ト相併セテ共ニ寸ノ立積十二万千七百五十坪。別ニ甲方面寸ヲ実ト為シ平方ニ開クノ見商寸（甲の1辺の平方根）ト乙方面寸ヲ実ト為シ立方ニ開クノ見商寸（立方根）ト及ビ丙方面寸ヲ実ト為シ三乗ノ方ニ開クノ見商寸（4乗根）ト各三和シテ（3つを加えて）一尺二寸。甲乙丙方面各幾何ト問ウ。



答日，左ノ術ニ依テ丙方面ヲ実ト為シ，三乗ノ方ニ開クノ見商数ヲ得。（丙の1辺の4乗根が得られる）

術日，天元ノ一ヲ立テ，丙方面ヲ実ト為シ三乗ノ方ニ開クノ見商数ト為シ（後に出てくる式では丙の1辺を「丙方」と書いているから，それによると $\sqrt[4]{\text{丙方}}$ を未知数にとるの意）別ニ云数（問にある「別ニ

甲方面寸ヲ………1尺2寸」を指す）ヲ減シテ余リヲ子位ニ寄ス（別－$\sqrt[4]{\text{丙方}}$を子とおく）丙方面ヲ実ト為シ三乗ノ方ニ開クノ見商数ヲ列シ（$\sqrt[4]{\text{丙方}}$をとり）三タビ之ヲ自乗シ（$\sqrt[4]{\text{丙方}}$を4乗し）丙方面（丙の1辺）ト為シ，再ビ之ヲ自乗シテ（丙の1辺を3乗して）丙積ト為シ，以テ又云数（問にある「又乙積ト丙積ト……十二万千七百五十坪」を指す）ヲ減シ余リヲ乙積ト為シ丑位ニ寄ス（又－丙方^3＝乙積を丑とおく）。先云数（問で最初にのべた値，即ち「只云ウ甲積ト乙積ト……十三万七千三百四十坪」を指す）ヲ列シ，内丑位ヲ減シテ余リヲ甲積ト為シ寅位ニ寄ス（先－丑＝甲積を寅とおく）。子位一十三自乗三十六段（子の14乗の36倍，即ち36子^{14}）子位冪（子^2）寅位冪（寅^2）相乗九段（9子^{2}寅^2），右ノ二位相併セテ得ル数ヲ卯位ニ寄ス（36子^{14}＋9子^{2}寅^{2}を卯とおく）。子位四乗冪丑位相乗二百五十二段（252子^{5}丑）子位七乗冪寅位相乗一百二十六段（126子^{8}寅），右二位相併セ得ル数ヲ辰位ニ寄ス（252子^{5}丑＋126子^{8}寅を辰とおく）。

以上は原文を忠実にたどったのであるが，以下説明を加えながら現代的に簡単に式を用いてのべることにする。但し念のため最初から書き改める。

第4問，甲乙丙3つの立方体がある。甲乙丙の体積をそれぞれ甲賣，乙賣，丙賣，1辺の長さをそれぞれ甲方，乙方，丙方，先云数，又云数，別云数をそれぞれ先，又，別と書くと

$$\text{甲賣}+\text{乙賣}=\text{先} \qquad (1)$$

$$\text{乙賣}+\text{丙賣}=\text{又} \qquad (2)$$

$$\sqrt{\text{甲方}}+\sqrt[3]{\text{乙方}}+\sqrt[4]{\text{丙方}}=\text{別} \qquad (3)$$

なる関係がある。甲，乙，丙各1辺を求めよ。

解　天元ノ一即ち未知数xとして$\sqrt[4]{\text{丙方}}$をとる。

$$\text{別}-x=\text{子} \qquad (4)$$ とおく。

$$x^4=\text{丙方},\ \text{丙方}^3=\text{丙賣}$$ となる。

$$\text{又}-\text{丙賣}=\text{乙賣}=\text{丑} \qquad (5)$$

$$\text{先}-\text{丑}\ (=\text{先}-\text{乙賣})=\text{甲賣}=\text{寅} \qquad (6)$$ とおく。

$$36\text{子}^{14}+9\text{子}^2\text{寅}^2=\text{卯}$$

$252\text{子}^5\text{丑}+126\text{子}^8\text{寅}=\text{辰}$　（ここ迄が原文に従ってきたとこ

ろである）

$$126\text{子}^{10}\text{寅}=\text{巳}$$

$$9\text{子}^{16}+72\text{子}^{7}\text{丑}+18\text{子丑寅}+36\text{子}^{4}\text{寅}^{2}=\text{午}$$

$$\text{子}^{18}+84\text{子}^{6}\text{寅}^{2}+\text{丑}^{2}=\text{未}$$

$$2\text{子}^{9}\text{丑}+168\text{子}^{3}\text{丑寅}+84\text{子}^{12}\text{寅}+\text{寅}^{3}=\text{申}$$ とおく。

$$\text{寅}^{2}\text{卯}^{3}+3\text{寅}^{2}\text{卯辰}^{2}+3\text{寅卯巳申}+3\text{寅卯午未}+3\text{寅辰巳未}+3\text{寅辰午申}+\text{寅巳}^{3}+3\text{寅巳午}^{2}+\text{未}^{3}+3\text{未申}^{2} \quad\cdots(7)$$

をつくり「左ニ寄ス」即ちおいておく。

$$3\text{寅}^{2}\text{卯}^{2}\text{辰}+\text{寅}^{2}\text{辰}^{3}+3\text{寅卯巳未}+3\text{寅卯午申}+3\text{寅辰巳申}+3\text{寅辰午未}+3\text{寅巳}^{2}\text{午}+\text{寅午}^{3}+3\text{未}^{2}\text{申}+\text{申}^{3} \quad\cdots(8)$$

をつくり

「左ニ寄セタルト相消シテ開方式（方程式）ヲ得ル」

(7)＝(8)　で方程式が得られたというのである。この方程式は両辺とも卯乃至申で表わされており，卯乃至申は子，丑，寅で表わされており，子，丑，寅は(4)，(5)，(6)からわかるようにxで表わされる。従ってこの方程式は x 即ち $\sqrt[4]{\text{丙方}}$についての方程式になっている。更に後でのべるようにxについて108次の方程式になっているのである。しかし，このようなことは全然説明していない。ただ「一百七乗方ノ飜法ニ之ヲ開ク」即ち108次方程式の解法によって解くと「丙方面ヲ実ト為シ三乗ノ方ニ開クノ見商数（$\sqrt[4]{\text{丙方}}$）ヲ得。仍チ前術ヲ推シテ甲乙丙方面ヲ得，各問ニ合ウ」で術が終っている。

発微算法の序文に「其ノ演段精微ノ極ニ至テハ文繁多ニシテ事混雑セルニ依テ之ヲ省略ス」とある。上の例で見る通り，何故に子，乃至申のようにおいたのか，ことに卯乃至申の係数は如何にして定めたのか，或は最後の方程式をつくるとき(7)(8)は如何にしてつくったのか，何故この両者が「相消ス」のか等，肝腎の点の説明は一切されていない。これは和算の伝統として「秘して関門の徒もその室に入らざればこれを聞くを得ず」[註9]の状態にしてあったからで，之が和算は学にあらずして芸なり[註10]と言われる理由でもあった。

3　点竄術について，発微算法演段諺解から

発微算法の術について，ある程度解説を加えたのが孝和の高弟建部賢弘の「発微算法演段諺解」（貞享2年，1685）である。その序に「発微算法ニ悉ク演段ヲ述シ……抑此演段ハ和漢ノ算者未ダ発明セザル所ナリ。誠ニ師ノ新意ノ妙旨古今ニ冠絶セリト謂ベシ」とあるが，これによって，孝和が創めた点竄術の演段，即ち方程式の解法，とくに多元連立方程式において，未知数を消去して1元の方程式に直す方法が世間に知られるようになったのである。[註11]

諺解において上の第4問の術を解説しているところを見てみよう。これによって孝和の点竄術，演段が如何なるものかをうかがうことができる。

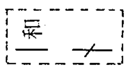
第四演段，「甲方平方ニ開クノ商，乙方立方ニ開クノ商ニ和アリ」　即ち

$$\sqrt{甲方}+\sqrt[3]{乙方}\ (=別-\sqrt[4]{丙方})=和$$

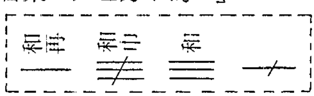
とすることから始まる。

「甲方アリ，乙方アリ，天元ノ一ヲ立テテ甲商ト為ス 〇一 」以下この小論では 　 の中は全体を90度廻転させて書いてある。本術即ち発微算法の術では天元ノ一として $\sqrt[4]{丙方}$ をとってある。ここでは補助の未知数として甲商即ち $\sqrt{甲方}$ をとったのである。そして $\sqrt{甲方}$ を消去するために $\sqrt{甲方}$ についての式をつくる。

$\sqrt{甲方}$ を y とおくことにする。

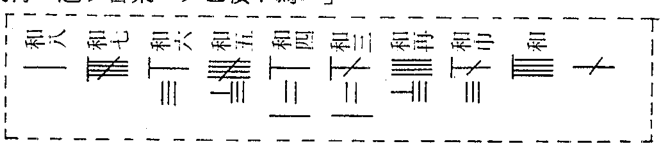
「以テ和ヲ減ジテ余リ乙商ト為ス  (1)

「之ヲ再ビ自乗シテ乙方ト為ス」

 (2)

(1)は　和 $-y$　でこれは $\sqrt[3]{乙方}$ であるから，これを3乗した　和$^3-3$和$^2y+3$和y^2-y^3　即ち(2)が乙方であるということである。

「又再ビ之ヲ自乗シテ乙積ト為ス」

 (3)

これを「左ニ寄ス」。この計算のし方は次の **4** でのべる。現代風には (1) の

和$-y$を3乗して(2)即ち

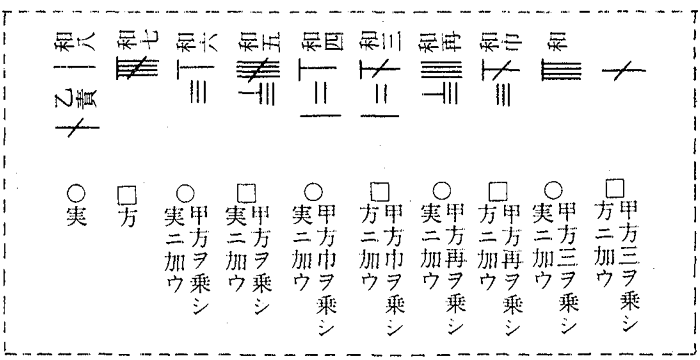
$$和^3-3和^2y+3和y^2-y^3$$

これを3乗して

$$和^9-9和^8y+36和^7y^2-84和^6y^3+126和^5y^4-126和^4y^5$$
$$+84和^3y^6-36和^2y^7+9和y^8-y^9 \qquad (4)$$

を得たことになる。これが(3)である。これを「左ニ寄ス」，即ち一応おいておく。之が乙責に等しいから

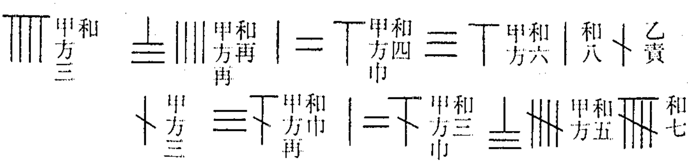
「乙責ヲ列シ，左ニ寄スト相消シテ式ヲ得ル」これが次の(5)である。この式の各項に，その横に書いてある演算(6)を行う。



(5)

(6)

そうすると次の式(7)になる。



(7)

この第1段目は「実」即ち未知数yを含まない項で，第2段目は「方」即ちyについての1次の項の係数である。こうして$\sqrt{甲方}$即ちyについての帰除式即ち1次式が得られた。

上の(5)から(7)を導くのは(5)即ち

$$-乙責+和^9-9和^8y+36和^7y^2-84和^6y^3+126和^5y^4$$
$$-126和^4y^5+84和^3y^6-36和^2y^7+9和y^8-y^9=0$$

から y の偶数次と奇数次の項をまとめて

$y^{2}=\text{甲方}$　であることから(7)　即ち

$$9\text{甲方}^{4}\text{和}+84\text{甲方}^{3}\text{和}^{3}+126\text{甲方}^{2}\text{和}^{5}+36\text{甲方和}^{7}+\text{和}^{9}-\text{乙責}$$

$$+\left(-\text{甲方}^{4}-36\text{甲方}^{3}\text{和}^{2}-126\text{甲方}^{2}\text{和}^{4}-84\text{甲方和}^{6}-9\text{和}^{8}\right)y=0 \quad (8)$$

を得たにすぎない。それが上の(6)のようにいちいち繁雑な指示を必要とした。和算においては式といっても表記されているのは係数だけで，天元ノ一 $\sqrt{\text{甲方}}$ 即ち y は表記されていないし，係数も並んでいるだけで，それら相互をつなぐ記号がなかった。特に等号を欠いていたが為に，式変形，とくに移項のようなことは，自ら式から導かれるものでなく，法則的なものとして改めて把握しておき，その法則にあてはめてするしかなかったのであろう。演段諺解に序の次に「演段起例」として，その法則をのべてある。その一条

「本術ニ何某巾ト出テ演段ニ，何某ト立ルトキハ，右ニ得タル式ノ初廉（2次の項の係数）ヨリ，次第ニ何某巾，何某三乗巾，何某五乗巾等ヲ以テ，隅迄（最高次の項の係数まで）相乗ジテ，実ト方トヘ加テ帰除式トナシテ，実自乗シテ左ニ寄セ，方巾ニ何某巾ヲ乗ジ相消シテ，後正負ヲ分テ左ニ寄ル数ト相消ス数トヲ求メテ本術ヲ起ス」

の「実ト方トヘ加テ帰除式トナシテ」までのところの何某を $\sqrt{\text{甲方}}$ でおきかえると，そのまま上の例にあてはまっている。

この演段起例にのべていることは，法則的なものであるが，それはむしろ計算の方法に重点がおかれていて，原理的な説明はなされていない。これが和算は術であると言われる一因である。[註12]

この起例の「実自乗シテ左ニ寄セ」以下を(7)に対して行う。即ち(7)に対して，今後は「実自乗シテ左ニ寄セ，方巾ニ甲方ヲ乗シ左ト相消ス」のである。従って(7)即ち(8)の y の項を移項して，然る後左右両辺を自乗することになるのであるが，和算では等号がない為かそうはしていない。この両辺に当たる項を次のように改めてつくっていくのである。しかし，これで $\sqrt{\text{甲方}}$ が消去される見込みはついた。

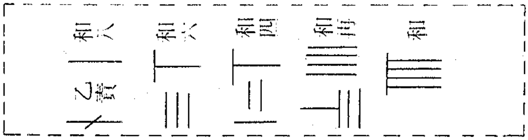
「甲商，乙商二和アリ $\boxed{\text{本術}}$ 子位」

この和が本術即ち発微算法の術で子とおいたものである。

「乙積アリ $\boxed{\text{本術}}$ 丑位，甲積アリ $\boxed{\text{本術}}$ 寅位」
ここで改めて

「天元ノ一ヲ立テ甲方ト為ス 〇一 」

即ちここで又，甲の1辺を未知数にとるのである。これをZで表わすことにしよう。そして(7)の実を甲方を未知数とした式即ちZについての式に書き改める。これは甲即ちZを消去するためである。



(9)

即ちZについて整屯して

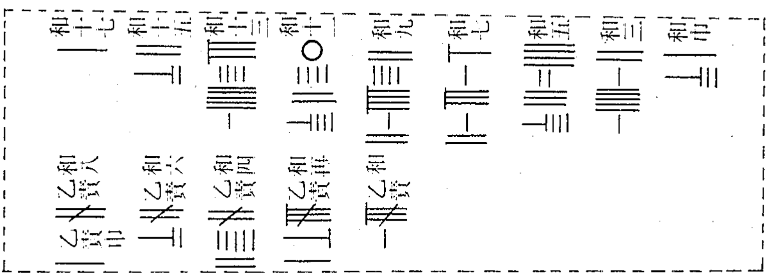
$-$乙責$+$和$^9+36$和$^7Z+126$和$^5Z^2+84$和$^3Z^3+9$和^4 (10)

この(9)は(7)の第1段を甲方が今度は未知数であることに注目すれば，横に並べて書いてあるものを縦に並べかえるだけで，直ちに書き直せたと思うのであるが，演段諺解では次のような手続きをふんでいる。

「天元ノ一ヲ立テ甲方ト為シ 〇一 三タビ之ヲ自乗シテ和ヲ以テ相乗シテ九段 〇〇〇〇和 甲方再乗冪ト和再乗冪ト相乗シテ八十四段 〇〇〇和再

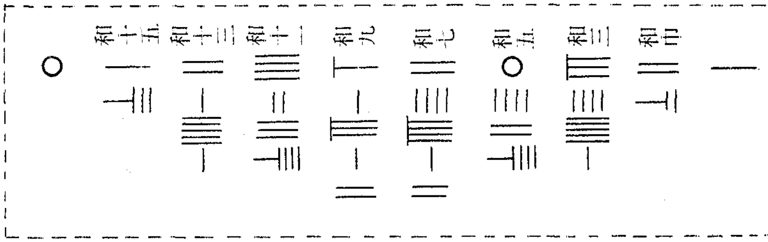
というように，つぎつぎに 和八 まで(9)の5つの項を改めてつくり，「右五位相併セテ得ル内乙責一段ヲ減シテ余リ是実ナリ」として(9)の式をつくっている。

ここではじめて(9)「ヲ自乗シテ」

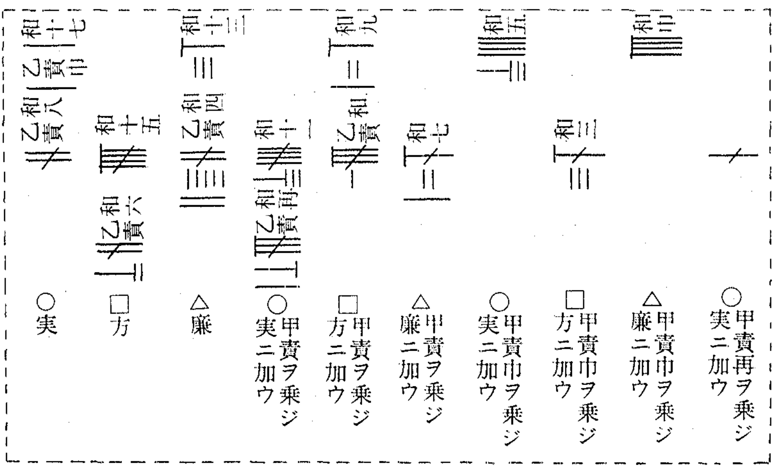


之を「左ニ寄ス」。一方(7)の方に当たる式を，(9)をつくったのと同じように

改めてつくりなおして，その自乗と甲方の積をつくる。



これと「左ニ寄スト相消シテ式ヲ得」即ち$\sqrt{甲方}$を消去した次の方程式(11)を得て，然る後，前の(6)と同じような演算(12)を行う。



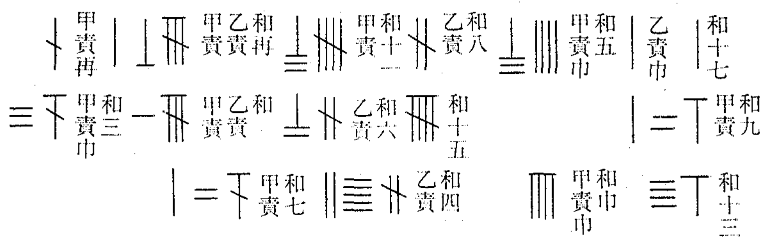
(11)

(12)

演算(12)から最後に方程式を得るまでの演算は，演段起例に前に引用した箇条に続いてある次の法則によっている。

「本術ニ何某再乗巾ト出テ，演段ニ何某ト立ル時ハ右ニ得タル式ノ次廉ヨリ次第ニ何某再乗巾，何某五乗巾，何某八乗巾等ヲ以テ隅迄相乗シテ，実ト方ト初廉トヘ加エ，平方式（２次式）トナシテ，実再自乗，方再乗巾ニ何某再乗巾ヲ相乗シ，廉再乗巾ニ何某五乗巾ヲ相乗シ三位併セテ左ニ寄ス。実方廉相乗ニ何某再乗巾ヲ相乗シ，之ヲ三タビシテ相消シテ後正ト負トヲ分テ，本術ノ左ニ寄ル数ト相消ス数トヲ得ル」

この規則の前半に従い演算(12)を行うと



(13)

ここは現在ならば次のように書くところである。甲方を Z とおくと(7)即ち(8)は

$$9\,和 Z^4+84和^3 Z^3+126和^5 Z^2+36和^7 Z+和^9-乙貢$$
$$+(-Z^4-36和^2 Z^3-126和^4 Z^2-84和^6 Z-9\,和^8)\ y=0$$

であるから y の項を移項して，然る後両辺を自乗する。$y^2=Z$ であるので y を消去して

$$(9\,和 Z^4+84和^3 Z^3+126和^5 Z^2+36和^7 Z+和^9-乙貢)^2$$
$$=(Z^4+36和^2 Z^3+126和^4 Z^2+84和^6 Z+9\,和^8)^2 Z$$

とする。この自乗を計算して再びすべての項を1辺に集めて Z について整屯して

$$(-2\,乙貢^2和^9+乙貢^2+和^{18})+(-72乙貢和^7-9\,和^{16})\ Z$$
$$+(-252乙貢和^5+36和^{14})\ Z^2+(-168乙貢和^3-84和^{12})\ Z^3$$
$$+(-18乙貢和+126和^{10})\ Z^4-126和^8 Z^5+84和^6 Z^6-36和^4 Z^7$$
$$+9\,和^2 Z^8-Z^9=0 \qquad (14)$$

を得る。これが(11)である。ところが $Z^3=$ 甲積であるから，Z^3 をすべて甲貢と書き改めると(14)は次のような Z についての2次方程式になる。

$$和^{18}+乙貢^2+84甲貢^2和^6\quad-(2\,乙貢和^9+84甲貢和^{12}+168甲貢乙貢和^3$$
$$+甲貢^3)$$
$$+\{126甲貢和^{10}\quad-(36甲貢^2\,和^4+18甲貢乙貢和+72\,乙貢和^7+9\,和^{16})\}\ Z$$
$$+\{9\,甲貢^2和^2+36和^{14}\quad-(126甲貢和^8+252乙貢和^5\}\ Z^2=0 \qquad (15)$$

これが(13)である。

さて，この(13)即ち(15)を得てみると，本術即ち発微算法の術において，卯乃至申のようなおき方をした理由がわかる。それは(15)で

和^{18}＋乙賁^{2}＋84甲賁^{2}和^{6}＝未

126甲賁和^{10}＝巳

9甲賁^{2}和^{2}＋36和^{14}＝卯

2乙賁和^{9}＋84甲賁和^{12}＋168甲賁乙賁和^{3}＋甲賁^{3}＝申

36甲賁^{2}和^{4}＋18甲賁乙賁和＋72乙賁和^{7}＋9和^{16}＝午

126甲賁和^{8}＋252乙賁和^{5}＝辰

となっていることが確められるからである。従って(15)は

$$\begin{array}{cl|l} \nmid & 申 & 未 \\ \nmid & 午 & 巳 \\ \nmid & 辰 & 卯 \end{array} \qquad (16)$$

即ち

（－申＋未）＋（－午＋巳）Z＋（－辰＋卯）Z^{2}＝0

になっている。これが上に引用した演段起例の「……平方式トナシテ」のところである。演段起例のこれにつづく「実再自乗，方再乗巾ニ……」以下を適用して今度はZを消去するのである。この起例は

$a+b+c=o$　ならば　$a^{3}+b^{3}+c^{3}=3abc$

であるからであるが，このような論理的な理由には全くふれていない。

さて，方程式(16)で，

実＝－申＋未，方＝－午＋巳，廉＝－辰＋卯

であるので，これから　実^{3}＋方$^{3}Z^{3}$＋廉$^{3}Z^{6}$　即ち

（－申＋未)^{3}＋（－午＋巳)^{3}甲賁＋（－辰＋卯)^{3}甲賁^{2}

を計算し，本術のように甲賁を寅と書くと

－申^{3}－3申未^{2}＋3申^{2}未＋未^{3}＋（－午^{3}－3午巳^{2}＋3午^{2}巳＋巳^{3}）寅

＋（－辰^{3}＋3辰^{2}卯－3辰卯^{2}＋卯^{3}）寅^{2}　(17)

を得て「左ニ寄ス」

一方，3実方廉巳^{3}即ち3（－申＋未）（－午＋巳）（－辰＋卯）甲賁を計算すると

－3 申午辰寅＋3 未午辰寅＋3 申巳辰寅－3 未巳辰寅

＋3 申午卯寅－3 未午卯寅－3 申巳卯寅＋3 未巳卯寅 (18)

になる。これと「左ニ寄」せたのと「相消シテ」即ち(17)＝(18) から x 即ち本術 $\sqrt[4]{\text{丙方}}=x$ についての方程式が得られるのである。諺解には全然説明がないが，後でこのことを確めておくことにする。

諺解では最後に演段起例の引用した最後の「正ト負トヲ分テ」に従って符号をそろえて

3 申^{2}未＋未^3＋3 午^{2}巳寅＋巳^{3}寅＋3 辰^{2}卯寅^2＋卯^{3}寅^2＋3 申午辰寅

＋3 未巳辰寅＋3 未午卯寅＋3 申巳卯寅 (19)

を「左ニ寄」せ

－申^3－3 申未^2－午^{3}寅－3 午巳^{2}寅－辰^{3}寅^2－3 辰卯^{2}寅^2

－3 未午辰寅－3 申巳辰寅－3 申午卯寅－3 未巳卯寅 (20)

の「負一十位相併セ相消ス」で終っている。即ち(19)＋(20)＝0 で本術での最後の方程式が得られたとしている。

以上のように諺解は発微算法の術の解説であるが，それでもこの方程式が何を未知数にした方程式なのか，或は 1 元の方程式になっているのか等について，一見してそれとわかるようなものでもなく，又説明もしていない。

念のために，この最後の方程式に表われる寅乃至申をしらべてみると，寅は本術の(6)にあるように甲責を指しており，卯乃至申は(15)と(16)の間の式から和，甲責及び乙責で表わされているので，結局この方程式は，和，甲責及び乙責で表わされていることになる。この問題の条件から

和＝$\sqrt{\text{甲方}}+\sqrt[3]{\text{乙方}}$＝別－$\sqrt[4]{\text{丙方}}$

甲責＝寅＝先－乙責＝先－（又－丙責）＝先－又＋$\sqrt[4]{\text{丙方}}^{12}$

乙責＝又－丙責＝又－$\sqrt[4]{\text{丙方}}^{12}$

これらを卯乃至申に代入すると，申^{3}が$\sqrt[4]{\text{丙方}}$の 108 次で最高次の項であるので，この方程式は $\sqrt[4]{\text{丙方}}$についての 108 次の方程式であることが確められる。

不便な表記法の下で，はじめの連立方程式から，甲，乙を消去して $\sqrt[4]{\text{丙方}}$だけの方程式に導いたすぐれた計算力と，洞察力の鋭さが改めて偲ばれるのである。

4　式の計算について，解隠題法から

解隠題法（貞享2年，1685）は孝和の著作で式の計算のし方，方程式のつくり方と解き方を説明している。ここでは式の乗法についてだけ記すことにする。

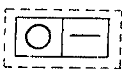
多項式の乗法の説明をみると，

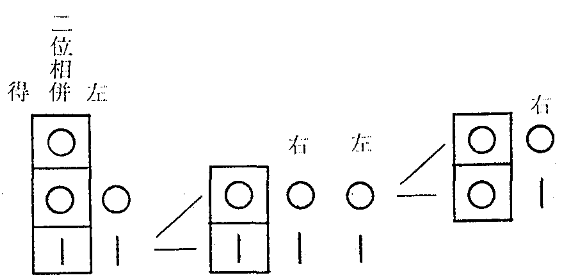
「相乗ハ其式ヲ左右ニ置キ左ヲ以テ上級ヨリ下級ニ到リ逐テ遍ク右ニ乗ジ同名（同符号）相乗ハ正ト為シ異名（異符号）相乗ハ負ト為ス乃チ空級ニ当リテ乗者空ト為ス各相併セ式ヲ得，自乗ハ之ニ準ズ」

次に次数の定め方として

「見乗ハ其式ノ乗数ヲ置ク乃チ帰除空平方一立方二（1次式2次式3次式の乗数はそれぞれ0，1，2）上ヲ以テ之ニ倣ウ。自乗ハ之ヲ倍シ一ヲ加ウ再乗（3乗）ハ之ヲ三シ（3倍し）二ヲ加ウ三乗（4乗）ハ之ヲ四シ三ヲ加ウ次第之ニ倣イ乗数ト為ス。相乗ハ両式，乗数ヲ相併セ一ヲ加エ乗数ト為ス（例 $x^2 \times x^5$ では両式の乗数は1と4だから $1+4=5$，$5+1=6$ 従って六乗式（即ち7次式）x^7 になる）」

つづいて例をあげている

「仮如（タトエバ） 之ヲ自乗ス。見乗数ハ帰除空ニ一ヲ加エ一ヲ得平方式ト為ス」即ち $0+x$ を自乗すると，上の法則から，これは1次式であるから，0に1を加えて1，従って2次式になる，というのである。そして算木を用いての実際の計算のし方を説明している。

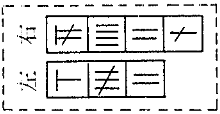


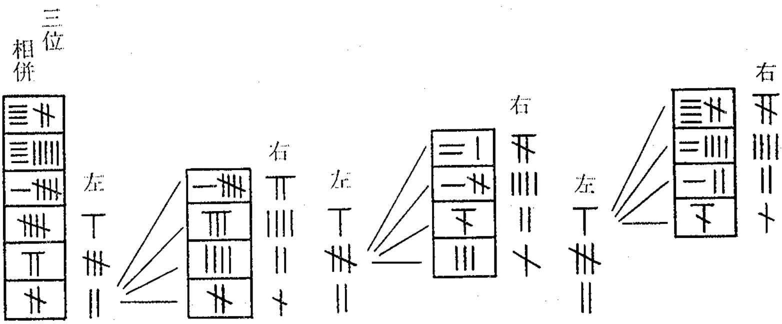
(3)　　(2)　　(1)

これは　$0+x$ の自乗を（0，1）×（0，1）として下の計算をしているのである。

	0,	1		
×	0,	1		
	0,	0		…………(1)
+		0	1	…………(2)
	0,	0,	1	…………(3)

いま一つ例を引いておく

「仮如  之ヲ相乗。見乗数ハ平方一立方ニ相併セ一ヲ加エ四ヲ得四乗方式ト為ス」即ち一方は2次式であるから1，他方は3次式であるから2，この1と2の和に1を加えて4，従って四乗方式（即ち5次式）になる，と説明した後，実際の計算法を示している。



(4)　(3)　(2)　(1)

これは $(-7+4x+2x^2-x^3)\times(6-3x+2x^2)$ を下のように計算しているのである。

	−7,	4,	2,	−1			
×	6,	−3,	2				
	−42,	24,	12,	−6			……(1)
		21,	−12,	−6,	3		……(2)
+			−14,	8,	4,	−2	……(3)
	−42,	45,	−14,	−4,	7,	−2	……(4)

5　天元術について，開方算式から

開方算式（貞享2年，1685？）は孝和の著で，数係数の方程式の解法を説明している。そこには課商（解の見当のつけ方）からはじまって，一種の方程式論を展開しているが，[注13]ここでは，はじめの課商と窮商の項だけを見ることに

する。

方程式を解くには次の Hornor の方法と同じ方法によっている。たとえば $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ に変換 $x=y+\alpha$ を行って $A_0+A_1y+A_2y^2+A_3y^3$ を得たとすると，$A_0=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3$，$A_1=a_1+2a_2\alpha+3a_3\alpha^2$，$A_2=a_2+3a_3\alpha$，$A_3=a_3$ であるので，もし $A_0=0$ になるならば α は方程式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$$

の解であることになる。

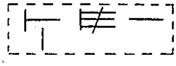
この A_0，A_1，A_2，A_3 の計算は機械的に下のようにしてできる。

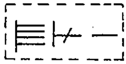
$$
\begin{array}{lllll}
\alpha) & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
 & a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3 & a_2\alpha+a_3\alpha^2 & a_3\alpha & \\
\hline
 & \underline{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3} & a_1+a_2\alpha+a_3\alpha^2 & a_2+a_3\alpha & a_3 \\
 & & a_2\alpha+2a_3\alpha^2 & a_3\alpha & \\
\hline
 & & \underline{a_1+2a_2\alpha+3a_3\alpha^3} & a_2+2a_3\alpha & a_3 \\
 & & & a_3\alpha & \\
\hline
 & & & \underline{a_2+3a_3\alpha} & a_3
\end{array}
$$

この〰〰のところがそれぞれ A_0，A_1，A_2，A_3 になっている。

まず「課商」をみよう。

「是商位ヲ考ル也凡ソ最初ノ商ヲ量ル者ハ適数ヲ一般ニ得ル考エ難キ有リ。故ニ或ハ先ツ一箇数（即ち1）ヨリ起シ或ハ題数ニ属シテ其ノ位数ヲ窺イ皆商数ヲ立テ下ヨリ命ジテ之ヲ除ク。実余レバ則チ商及バズ故ニ其ノ数ヲ逐増ス乃チ多少不定任意ニ之ヲ増ス。之ヲ開キ若シ誤リテ商太ニ過レバ則チ諸級反覆シテ同名之後商得難シ。故ニ異名商ヲ立テ之ヲ開ク………」と一般法則をまずのべている。そして実例に入る。

「仮如平方（2次方程式）  $(16-8x+x^2=0)$」を考える。

「先ズ正商一ヲ立テ廉ヨリ之ヲ命シ（掛けて）実ニ至リテ之ヲ除ク，余正九下ヨリ之ヲ命ジ方ニ至リテ相減ジ，余負六  $(9-6x+x^2=0)$。是商少シ，而シテ実ノ余リ太ダ多シ，故ニ又商三ヲ立テ前ノ如ク之ヲ開ク，実尽ク」

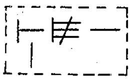
これは，まず1を立てて

$$
\begin{array}{lrrrl}
1) & 16 & -8 & 1 & \\
 & -7 & 1 & & \\
\hline
 & 9 & -7 & 1 & \cdots\cdots\cdots(1) \\
 & & 1 & & \\
\cline{3-4}
 & & -6 & 1 & \cdots\cdots\cdots(2)
\end{array}
$$

即ち　$16-8x+x^2=0$　に変換 $x=y+1$　を行って　$9-6y+y^2=0$ を得たのであるが，「商」（即ち1）が少なすぎたので実の余りが9になりまだ多い。そこで「商」を多くして3にして再び変換 $y=Z+3$ を行ってみると

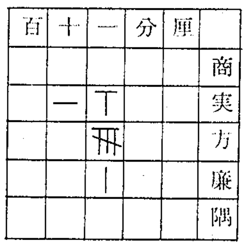
$$
\begin{array}{lrrrl}
3) & 9 & -6 & 1 & \\
 & -9 & 3 & & \\
\hline
 & 0 & -3 & 1 & \cdots\cdots\cdots(3) \\
 & & 3 & & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & 1 & \cdots\cdots\cdots(4)
\end{array}
$$

即ち　$Z^2=0$　になった。定数項は0になった。「実尽キ方亦空ト為リ，変式ヲ得 | 実尽 | ○ | 一 | 是ニ於テ商無シ，故ニ立ツ所二次（2回商を立てた）正商相併セ四ヲ得（$1+3=4$）定商ト為ス也（4が解である)」

以上の計算を算盤上で算木を用いて計算すると次のようになる。まず算盤は1図のようになっている。ここへ算木をおいて  を表わす（2図）

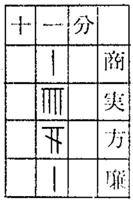
百	十	一	分	厘	
					商
					実
					方
					廉
					隅

1図

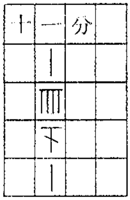


2図

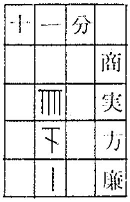
正数と負数の区別は算木では色の赤と黒で区別するが，印刷の都合上ここでは筆記の時と同じように表わしておく。「正商一ヲ立テ廉ヨリ之ニ命シ実に至リテ除ク余正九」算盤上でこの計算をして上の(1)を表わしたのが3図，次に(2)を得たのが4図，そこで今度は，この $9-6y+y^2=0$（5図）をもとにして「商」3を立て，逐次(3)，(4)を得たところが6図，7図である。



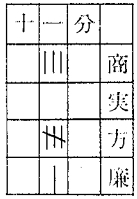
3 図



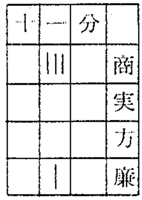
4 図



5 図



6 図

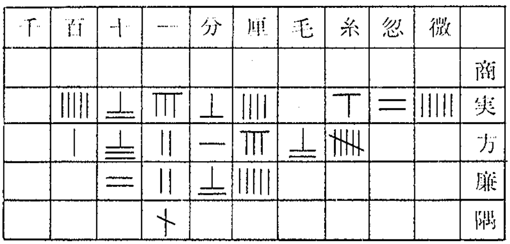


7 図

次に3次方程式

$$578.640625-192.1875x+22.7x^2-x^3=0$$

を解いている。これは算盤上では次のように表わされる。



まず課商のところの一般法則「或ハ題数ニ属シテ其シ位ヲ窺イ」により，「商」の見当をつけて，「初商」5を立てる。（未知数をすべて x で表わすと）

$$61.453125-39.6875x-7.75x^2-x^3=0$$

を得る。「是初商数少シ，而シテ実余ル，故ニ又後商正五ヲ立テ，之ヲ開キ……」即ち更に5を立てて

$$-68.234375-37.1875x-7.25x^2-x^3=0$$

を得る。「後商太ニ過グ，而シテ諸級皆負ニ変シ正商得難シ。故ニ反リテ負商一ヲ立ツ」即ち商に -1 を立てる。

$$-37.296875-25.6875x-4.25x^2-x^3=0$$

を得る。「此負商未ダ及バズ式中又正商得難シ故ニ再ビ負商二ヲ立テ」即ち「商」に -2 を立て

$$5.078125-20.6875x+1.75x^2-x^3=0$$

を得る。「是ニ於テ諸級正負悉ク旧ニ復ス」実は小さくはなったがまだ残っている。「故ニ此ノ方ヲ以テ仮ニ実ヲ約シ」

実÷方$=5.078125\div20.6875=0.24\cdots$

になるので，次に「商」0.2を立てると

$$1.002625-20.1075x+1.15x^2-x^3=0$$

を得る。この計算の進め方は上にあげた一般的な法則につづいて「各級ノ正負旧ニ復スヲ俟チ，亦同名商ヲ立テ之ヲ開ク。実首已ニ除去スト雖モ其ノ数未ダ尽キザレバ則チ方ヲ代テ仮ニ実ヲ約シ，次位ヲ視テ其ノ数ヲ次商ニ立テ之ヲ開ク。……」とあるのに従っているのである。ここで又この式の

実÷方$=1.002625\div 20.1075=0.0498\cdots\fallingdotseq 0.05$

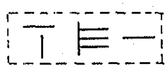
商0.05を立てると

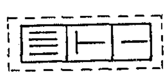
$$0-20x+x^2-x^3=0$$

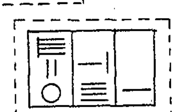
を得る。故にはじめの方程式の解として

$5+5-1-2+0.2+0.05=7.25$（正七箇二分五厘）

を得る。以上が「課商」ということである。これをすべて算盤上で算木で計算をしている。では実がなかなか0にならない場合にはどうするか。之が次にのべる「窮商」である。「是商数畸零之微（小数点以下の小さい数）ヲ究ムル也」である。

「仮如，平方（2次方程式）（$11+8x+x^2=0$）

先ヅ負商一箇（-1）ヲ立テ之ヲ開クト（$4+6x+x^2=0$）

ヲ得，次ニ負商七分（-0.7）ヲ立テ之ヲ開クト（$0.29+4.6x+x^2=0$）此ノ如ク尽キザル有リ。故ニ正方四箇六分ヲ以テ正実二分九厘ヲ除シ　負六厘三毫ヲ得」即ち　実÷方$=0.29\div 4.6=0.063\cdots$（負とする）「開商（$-1-0.7$）に併セテ（$-1-0.7-0.063$）負一箇七分六三ヲ得」次にこの$-1.763$を「次商」として原式$11+8x+x^2=0$　を開くと

$$0.004169+4.474x+x^2=0$$

を得る。

実÷方$=0.004169\div 4.474=0.0009318\cdots$（負とする）

そこで　$-1.763-0.0009318=-1.7639318$　を「三商」として，又原式を開くと

$$0.00000099505124+4.4721364x+x^2=0$$

を得る。

実÷方＝0.00000099505124÷4.4721364

＝0.00000022250020（負とする）

次にまた　－1.7639318－0.00000022250020

＝－1.76393202250020 を「四商」とする。

この最後のところは

「負一箇七分六三九三二〇二二五〇〇二〇ヲ得，四商ト為ス」そして「逐テ此ノ如クシテ，其ノ微ヲ究ムル也」。これが竅商ということである。

この竅商の方法も最初に一般的な法則を示している。即ち「是竅商ハ数ノ畸零之微ヲ究ムル也」につづいて「実数ヲ開ク尽キザル者有リ開出ノ位数ニ随イ方ヲ以テ実ヲ除シ，乃チ同名ノ除ハ定メテ負数ヲ得異名ノ除ハ定メテ正数ヲ得ル也。其ノ数ヲ以テ正負ニ依テ開キタル商ニ加減シ次商ト為シ，之ヲ以テ原式ノ隅ヨリ命ジテ実ニ至リテ之ヲ加減シ，亦隅ヨリ方ニ至リ之ヲ加減シ，其ノ方ヲ以テ次商ノ位数に随テ其ノ実ヲ除キ，得ル数ヲ以テ次商ニ加減シ三商ト為ス。……次第此ノ如クニシテ各級定商ヲ得ル也」

これが Newton の近似解法と一致していると言われるところである。たしかに $f(x)=a+bx+cx^2=0$ において最初に立てた「商」（近似解）を α とすると $f(\alpha)$＝実，$f'(\alpha)$＝方になるから「次商」（次の近似解）として Newton の方法と同じく $\alpha-f(\alpha)/f'(\alpha)$ をとったことになっている。しかし上の例は代数方程式の場合であって，これを以て孝和が Newton の近似解法そのものを既に発見していたとすることは出来ないであろう。ここに思い至った道程については和算書は何も語っていない。

註

1　加藤平左エ門　日本数学史上　P 131，槇書店 1971
2　高田真治・後藤基己　易経下　P 245　岩波書店 1975
3　平山諦・下平和夫・広瀬秀雄　関孝和全集，序 P 15　大阪教育図書 1974
4　点竄術なる名称は後に松永良弼が主君内藤政樹の意に従ってつけたもので，孝和当時は帰源整法といっていた。註 9，P 106

5　発微算法の序から
6　註 3，関孝和全集　大阪教育図書　1974
7　平山諦　関孝和　P 67～71　恒星社厚生閣　1974
8　以下の原文はすべて註 3 の関孝和全集による。
9　遠藤利貞　増修日本数学史　P 109　恒星社厚生閣　1960
10　小倉金之助　日本の数学　P 105　岩波書店　1940
11　註 7，P 14
12　註10，P 119
13　正根負根或は根の個数等については開方飜変之法（貞享 2 年，1685）でのべているが誤りもある。註 7，P 94