研究ノート

非代替定理の最も簡単な証明

藤 本 喬 雄

I　はじめに

非代替定理は線型経済学において，有名なものの一つであるが，已に多くの証明が知られている。簡単な展望としては文献〔2〕を参照されたい。さて，その上に本稿の証明を加えるにあたっては，何がしかの理由がいる訳であるが，それは以下の証明が最も単純，最も初等的，しかも実際の計算法をも与えているという諸点である。「最も簡単な証明の中の一つ」と言うべきと，読者は思われるかも知れないが，定理内容の複雑性と比較考慮してみれば，われわれの証明より単純・初等的なものは無いと考える次第である。

では，いかなる点で単純・初等的かを説明すべきであろう。要点は，これまで最も単純と考えられた文献〔1〕,〔3〕における証明は，$(I-A)$という行列の非負逆行列の存在定理を使っているという事実である。この定理は高等なものでないかわりに，フロベニウスの定理と同様，初等的でもない。次節のわれわれの証明は，行列式の理論を一切必要としない。初等的な数列の極限定理を用いるのみである。もちろん，行列式を用いないのであるから，フロベニウスの定理や逆行列なるものは出演しない。

われわれの証明は，ヨハンセン〔3〕の証明に似ている。問題は，いかに非負逆行列の存在定理を避けるか，あるいはそれと同価な行列，$I+A+A^2+A^3+\cdots$，の直接使用（無論，収束性を吟味した後）を避けるか，ということである。この点を以下の証明の中で御覧願いたい。

II　モデル，定理および証明

われわれのモデルは技術代替を許容するレオンチェフ・モデルである。すなわち，財は n 個あり，各プロセスは各種の財をインプットとして用いつつ，唯一の財をアウトプットする(結合生産の不在)。第 j 財のみを産出する活動の総体を第 j 産業と呼ぼう。規模に対する収穫不変と，外部性（経済・不経済）の不在を仮定する。産業プロセスで再生産できない財が唯一個あり，それを労働と呼ぶことにする。各産業は代替的プロセスを擁しており，第 j 産業には S_j 個のプロセスが利用可能とする。記号を次のように定めよう。

a_j^k…j 産業の k 番目プロセスの財インプット・ベクトル（単位生産当たり）。

l_j^k…j 産業の k 番目プロセスの労働インプット。全て正値と仮定する。

p…n 次元の価格行ベクトル(賃金率を1としたもの)。(p_j は p の j 番目の要素)。

x…n 次元の活動水準列ベクトル。

われわれの技術体系が充分生産的であることを仮定しておく必要がある。すなわち，

仮定：ある p° が存在して，全ての j に対して次の条件を満足する。すなわち，ある k に対して

$$p_j^\circ \geqq p^\circ \cdot a_j^k + l_j^k$$

この k は j に依存してよい。

価格 p° の下では，各産業がプロセスを適当に選べば，コストをカバーできることを仮定している訳である。

まず最初に次の補題から出発しよう。

補題1　ある p^* が存在して次の条件を満足する。全ての j に対し

$$p_j^* = \min_k (p^* \cdot a_j^k + l_j^k) \tag{1}$$

証明　$p^1 = p^\circ$ として次の繰り返し法を考える。各 j に対し

$$p_j^{i+1} = \min_k (p^i \cdot a_j^k + l_j^k),\ i = 1, 2, \cdots$$

仮定により，$p^2 \leqq p^1$ が出てくる。これからまた，$p^3 \leqq p^2$ が従うので，結局ベクトル列 $\{p^i\}$ は非負の非増加列となるので，ある p^* に収束する。これが補題の条件を満たす

ことは明瞭である。 ■

さて，(1)式を満たすプロセスを各産業から一個集めてきて，a_j および l_j により，$n\times n$ 行列 A^* と n 次元行ベクトル L^* とを形成する。すると，

補題 2　どんな n 次元列ベクトル $d\geqq 0$ をもってきても，方程式 $x=A^*\cdot x+d$ を満たす解 x^* が存在する。

証明　(1)式より，$p^*=p^*\cdot A^*+L^*$.　(2)

次の繰り返し法を考える。$x^1=0$，そして

$$x^{i+1}=A^*\cdot x^i+d,\ i=1,2,\cdots \tag{3}$$

明らかに，$x^2\geqq x^1$。これからまた，$x^3\geqq x^2$，以下同様に考えて，$\{x^i\}$ は非減少の非負ベクトル列となる。(2)式の両辺右側より x^{i+1} をかけて，

$$p^*\cdot x^{i+1}=p^*\cdot A^*\cdot x^{i+1}+L^*\cdot x^{i+1}$$

一方，(3)式の左側より p^* をかけて，

$$\begin{aligned} p^*\cdot x^{i+1} &= p^*\cdot A^*\cdot x^i+p^*\cdot d \\ &\leqq p^*\cdot A^*\cdot x^{i+1}+p^*\cdot d \end{aligned}$$

最後の不等式は $\{x^i\}$ の非減少単調性による。上の二個の式より，

$$L^*\cdot x^{i+1}\leqq p^*\cdot d$$

が出てくる。L^* は厳密に正のベクトルなのでこの不等式は $\{x^i\}$ の有界性を意味している。かくて $\{x^i\}$ は単調にある x^* に収束し，それが，求める解であることは明白である。 ■

いよいよ定理をかかげよう。

非代替定理　ある非負の n 次元列ベクトルに対し，$x\geqq A\cdot x+d$ とすると，$L^*\cdot x^*\leqq L\cdot x$ である。ここに，A，L は各産業から一個ずつプロセスを集めて形成したインプット行列および労働インプット・ベクトルである。

証明　$p^*=p^*\cdot A^*+L^*$，$x^*=A^*\cdot x^*+d$

なので，

$$p^*\cdot x^*=p^*\cdot A^*\cdot x^*+L^*\cdot x^*,$$

$$p^*\cdot x^*=p^*\cdot A^*\cdot x^*+p^*\cdot d,$$

が出てくる。これより，$L^*\cdot x^*=p^*\cdot d$。

一方，$p^* \leqq p^* \cdot A + L$ と，$x \geqq A \cdot x + d$ より

$$p^* \cdot x \leqq p^* \cdot A \cdot x + L \cdot x,$$

$$p^* \cdot x \geqq p^* \cdot A \cdot x + p^* \cdot d,$$

が出てくる。これより，$L \cdot x \geqq p^* \cdot d$。

以上をまとめて，$L^* \cdot x^* = p^* \cdot d \leqq L \cdot x$。　■

III　おわりに

前節の定理が，従来の定式化（利用可能な労働力一定の下での生産フロンティアに関するもの）と同等であることは，文献〔1〕，〔3〕と同様，極簡単に示しうる。

われわれは各産業に利用可能なプロセスが有限個であるとしたが，これが適当なコンパクト性の仮定の下に無限個に拡張できることは明らかであろう。

参　考　文　献

〔1〕 Chander, P., "A Simple Proof of the Nonsubstitution Theorem," *Quarterly Journal of Economics* 88 (1974), pp. 698-701.

〔2〕 Fujimoto, T. and C. Birchenall, "The Nonsubstitution Theorem for Mathematical Programming Problems in a Banach Lattice," 香川大学経済論叢，第58巻（1985年），pp. 477-482.

〔3〕 Johansen, L., "Simple and General Nonsubstitution Theorems for Input-Output Models," *Journal of Economic Theory* 5 (1972), pp. 383-394.